1 Grundlagen Entscheidungstheorie:

- Der Entscheidungsträger wählt aus einer Menge von Alternativen, dem **Aktionenraum** $A = \{a_1, a_2, \cdots a_m\}$.

  Annahmen:

  - Der Entscheidungsträger ist gezwungen, eine der betrachteten Alternativen zu ergreifen.
  - gleichzeitig kann immer nur **eine** der Alternativen realisiert werden, d.h. die Alternativen schließen einander aus.

- Das Ergebnis der gewählten Handlungsalternative hängt vom Umfeld ab. Die Menge aller relevanten Umfeldzustände $z_1, z_2, \cdots z_n$ bildet den Zustandsraum Z.

- Man unterscheidet **Entscheidung unter Unsicherheit,** falls keinerlei Information über die Eintrittswahrscheinlichkeiten der z_i vorliegt.

  Entscheidung unter Risiko, falls Eintrittswahrscheinlichkeiten bekannt sind.

- Die **Ergebnismatrix** gibt die Ergebnisse der einzelnen Alternativen für die einzelnen Umfeldzustände an, genauer e_{ij} beschreibt das Ergebis von Alternative a_i bei Umfeldzustand z_j.

	z_1	z_2	$\cdots$	z_n
	p_1	p_2	$\cdots$	p_n
a_1	e_{11}	e_{12}	$\cdots$	e_{1n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_m	e_{m1}	e_{m2}	$\cdots$	e_{mn}

Dominanzprinzipien: absolute Dominanz

Eine Alternative a_i **dominiert** eine Alternative a_j **absolut**, wenn das schlechtestmögliche Ergebnis von a_i nicht kleiner als das bestmögliche Ergebnis von a_j ist.

$$a_i \text{ dominiert } a_j \text{ absolut } \Leftrightarrow \min_k e_{ik} \geq \max_l e_{jl}$$

(unter der Annahme, dass hohe Werte von e_{ij} angestrebt werden.)

Bsp:

	z_1	z_2	z_3	min	max
a_1	70	80	10	10	80
a_2	50	90	20	20	90
a_3	20	10	20	10	20

a_2 dominiert a_3 absolut.

Zustandsdominanz

Eine Alternative a_i **dominiert** eine Alternative a_j, wenn in jedem Umfeldzustand a_i besser bzw. mindestens gleich gut wie a_j ist, d.h.

$$a_i \text{ dominiert } a_j \Leftrightarrow \begin{cases} e_{ik} \geq e_{jk} & \text{für alle } k \\ e_{il} > e_{jl} & \text{für mindestens ein } l \end{cases}$$

Bsp:

	z_1	z_2	z_3	min	max
a_1	70	80	10	10	80
a_2	50	90	20	20	90
a_3	20	10	20	10	20
a_4	60	95	30	30	95

a_4 dominiert a_2 (im Sinn der Zustandsdominanz).

Wahrscheinlichkeitsdominanz:

(nur bei Entscheidung unter Risiko!)

Für jede Alternative a_i kann das Ergebnis als Zufallsvariable aufgefasst werden. Sei f_i die entsprechende Dichte und F_i die entsprechende Verteilungsfunktion dieser Zufallsvariablen.

a_i dominiert a_j nach dem Kriterium der **stochastischen Dominanz erster Ordnung**, falls

$$F_i(x) \leq F_j(x), \forall x, \quad \text{und } F_i(\tilde{x}) < F_j(\tilde{x}) \text{ für mindestens ein } \tilde{x}.$$

a_i dominiert a_j nach dem Kriterium der **stochastischen Dominanz zweiter Ordnung**, falls

$$\int_{-\infty}^{x} F_i(\xi) d\xi \leq \int_{-\infty}^{x} F_j(\xi) d\xi, \forall x$$

Bsp. 1:

	z_1	z_2	z_3	z_4
	$p_1 = 0.3$	$p_2 = 0.2$	$p_3 = 0.4$	$p_4 = 0.1$
a_1	20	40	10	50
a_2	60	30	50	20

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & x < 10 \\ 0.4 & 10 \leq x < 20 \\ 0.7 & 20 \leq x < 40 \\ 0.9 & 40 \leq x < 50 \\ 1 & 50 \leq x \end{cases} \qquad F_2(x) = \begin{cases} 0 & x < 20 \\ 0.1 & 20 \leq x < 30 \\ 0.3 & 30 \leq x < 50 \\ 0.7 & 50 \leq x < 60 \\ 1 & 60 \leq x \end{cases}$$

$$F_2(x) \leq F_1(x) \Leftrightarrow 1 - F_2(x) \geq 1 - F_1(x)$$

d.h. die Wahrscheinlichkeit, einen Gewinn höher als x zu erzielen ist bei Alternative a_2 größer als bei a_1.

Bsp. 2:

	z_1	z_2	z_3
	$p_1 = 0.4$	$p_2 = 0.2$	$p_3 = 0.4$
a_1	120	100	30
a_2	60	0	110

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & x < 30 \\ 0.4 & 30 \leq x < 100 \\ 0.6 & 100 \leq x < 120 \\ 1 & 120 \leq x \end{cases} \qquad F_2(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0.2 & 0 \leq x < 60 \\ 0.6 & 60 \leq x < 110 \\ 1 & 110 \leq x \end{cases}$$

$$F_2(x) - F_1(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0.2 & 0 \leq x < 30 \\ -0.2 & 30 \leq x < 60 \\ 0.2 & 60 \leq x < 100 \\ 0 & 100 \leq x < 110 \\ 0.4 & 110 \leq x < 120 \\ 0. & 120 \leq x \end{cases}$$

a_1 dominiert a_2 im Sinn der stochastischen Dominanz zweiter Ordnung, da $\int_{-\infty}^{x}(F_2(\xi) - F_1(\xi))d\xi \geq 0$

Entscheidung unter Ungewissheit

Maximin-Regel

andere Bezeichnungen: Mini-max Kriterium, Wald Regel

Wähle jene Alternative mit dem maximalen Minimum.

Bsp:

	z_1	z_2	z_3	z_4	min
a_1	60	30	50	60	30
a_2	50	90	20	20	20
a_3	60	95	30	-30	-30

$\Rightarrow$ Wähle a_1.

Eigenschaften:

- extrem risikoscheu, bewertet Alternativen nur nach dem schlechtesten Ergebnis.
-

	z_1	z_2	z_3	z_4	min
a_1	1000	1000	1	1000	1
a_2	1.1	1.1	1.1	1.1	1.1

Nach der Maximin-Regel entscheidet man sich für a_2.

Maximax-Regel

Wähle jene Alternative mit dem maximalen Maximum.

Bsp:

	z_1	z_2	z_3	z_4	min	max
a_1	60	30	50	60	30	60
a_2	50	90	20	20	20	90
a_3	60	95	30	-30	-30	95

Wähle a_3.

Eigenschaften:

extrem risikofreudig, bewertet Alternativen nur nach dem besten Ergebnis.

Hurwicz-Regel

Kombination von Maximin-Regel und Maximax-Regel.

$\lambda \in [0, 1] \cdots$ Optimismusparameter

Wähle jene Alternative, für die der Präferenzwert

$\Phi(a_i) = \lambda \max_j(e_{ij}) + (1 - \lambda) \min_j(e_{ij})$ maximal ist.

	z_1	z_2	z_3	z_4	min	max	Φ
a_1	60	30	50	60	30	60	42
a_2	50	90	20	20	20	90	48
a_3	60	95	30	-30	-30	95	20

$\Rightarrow$ Wähle a_2.

Savage-Niehans-Regel

andere Bezeichnungen: Regel des kleinsten Bedauerns, Minimax Regret Kriterium

- Bestimme für jede Spalte, d.h. für jeden Umfeldzustand, das Maximum der Ergebnismatrix.
- Bestimme die Matrix des Bedauerns, indem in jeder Spalte vom Spaltenmaximum der jeweilige Wert abgezogen wird, d.h. $r_{ij} = max_k(e_{kj}) - e_{ij}$
- Bestimme für jede Zeile, d.h. für jede Alternative, das Maximum der Regret-Matrix
- Wähle jene Alternative, für die das maximale Bedauern minimal ist.

	z_1	z_2	z_3	z_4
a_1	**60**	30	**50**	**60**
a_2	50	90	20	20
a_3	**60**	**95**	30	-30

Regret-Matrix:

	z_1	z_2	z_3	z_4	max
a_1	0	65	0	0	65
a_2	10	5	30	40	40
a_3	0	0	20	90	90

$\Rightarrow$ Wähle a_2.

Laplace-Kriterium:

Nehme an, dass jeder Umfeldzustand mit Wahrscheinlichkeit $p = 1/n$ angenommen wird.

	z_1	z_2	z_3	z_4	Φ
a_1	60	30	50	60	50
a_2	50	90	20	20	45
a_3	60	95	30	-30	38.75

$\Rightarrow$ Wähle a_1.

Axiomen-Katalog Milnors

zehn Axiome, denen eine brauchbare Entscheidungsregel genügen sollte:

1 **Ergebnis-Linearität:**

Die Präferenzrelation zwischen zwei bel. Alternativen a_1 und a_2 soll unverändert bleiben, wenn sämtliche Ergebniswerte $e_{ij}, i = 1, 2, j = 1, 2, \cdots, n$ der gleichen beliebigen positiv-linearen Transformation

$$e'_{ij} = \alpha + \beta e_{ij}, \quad \beta > 0$$

unterzogen werden:

2 **Zeilenhinzufügen:**

Die Präferenzrelation zwischen zwei bel. Alternativen a_1, a_2 soll nur durch den individuellen Vergleich von a_1 mit a_2 bestimmt werden, unabhängig vom Aussehen des sonstigen Aktionsraumes, d.h. insbesondere darf das Hinzufügen weiterer Alternativen die Präferenzrelation nicht beeinflussen.

3 **Addition zu einer Spalte:**

Die Präferenzrelation soll sich nicht ändern, wenn zu einer bestimmten Spalte eine Konstante addiert wird.

4 **Streichung einer identischen Spalte**

Die Präferenzrelation soll zwischen beliebigen Alternativen unverändert bleiben, wenn zwei Umweltzustände mit identischen Ergebnissen zu einem Umweltzustand zusammengefasst werden.

5 **Dominanz:**

Eine von einer anderen Alternative dominierte Alternative kann nicht optimal sein.

Die Savage-Niehans-Regel verletzt Axiom (4)
Maxi-Min Regel und Hurwicz-Regel verstossen gegen (3) und (5)
Laplace verletzt gegen (4)

2 Entscheidung unter Risiko:

Das $\mu-$ Prinzip:

Für jede Alternative a_i kann das Ergebnis als Zufallsvariable aufgefasst werden. Beim $\mu-$ Prinzip werden die Alternativen nun anhand des Erwartungswertes des Ergebnisses bewertet und jene Alternative gewählt, für die der Erwartungswert maximal (bzw. minimal) ist.

Präferenzfunktion: $\Phi(a_i) = \mu_i = \sum_{j=1}^{n} e_{ij} p_j$

Bsp.

Eine faire Münze wird geworfen. Als Entscheidungsalternative können unterschiedlich hohe Einsätze gewählt werden. Der Gewinn ist gegeben durch:

	Kopf	Zahl	μ
	$p_1 = 0.5$	$p_2 = 0.5$	
a_1	-1	1	0
a_2	-10	10	0
a_3	-1000	1000	0
a_4	-1 000 000	1 000 000	0

Petersburger Paradoxon: Eine ideale Münze wird solange geworfen, bis zum ersten Mal "Zahl" erscheint. Erscheint beim $n-$ten Wurf zum ersten mal "Zahl", so erhält der Spieler 2^n Euro ausbezahlt.

Frage: Welchen Spieleinsatz wären Sie bereit zu zahlen, um an diesem Spiel teilzunehmen?

	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$\cdots$	n
p_i	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	$\ldots$	2^{-n}
Gewinn(i)	2	2^2	2^3	$\cdots$	2^n
p_i*Gewinn(i)	1	1	1	$\cdots$	1

Der Erwartungswert ist " $+\infty$"

Entscheidung auf Grundlage von Erwartungswert und Streuung ($\mu - \sigma-$ Prinzip)

Verwende Varianz bzw. Standardabweichung als Mass für das Risiko:

$$Var(a_i) = \sigma_i^2 = \sum_{k=1}^{n} p_k (e_{ik} - \mu_i)^2$$

$\sigma_i = \sqrt{Var(a_i)} \cdots$ Standardabweichung

Die Präferenzfunktion hängt nun von Erwartungswert und Standardabweichung (bzw. Varianz) ab, $\Phi = \Phi(\mu, \sigma)$

Def: Ein Entscheidungsträger heißt **risikofreudig** wenn er bei gleichem Erwartungswert jene Alternative mit dem **größeren** Risiko vorzieht.

Ein Entscheidungsträger heißt **risikoscheu** (oder risiko-avers) wenn er bei gleichem Erwartungswert jene Alternative mit dem **kleineren** Risiko vorzieht.

Ein Entscheidungsträger heißt **risikoneutral** wenn er bei Alternativen mit gleichem Erwartungswert indifferent ist.

$\mu-\sigma-$ Kombinationen, die denselben Präferenzwert ergeben, bilden Indifferenzkurven $\Phi(\mu, \sigma) =$const.

Häufige Ansätze für Präferenzfunktionen:

$$\begin{aligned}
\Phi(\mu, \sigma) &= \mu + \alpha\sigma \\
\Phi(\mu, \sigma) &= \mu + \alpha\sigma^2 \\
\Phi(\mu, \sigma) &= \mu + \alpha(\mu^2 + \sigma^2)
\end{aligned}$$

2.1 "safety-first" criterion

Consider the following two lotteries:

x	$p(x)$
-8	$\frac{1}{11}$
3	$\frac{10}{11}$

y	$p(y)$
1	$\frac{10}{11}$
12	$\frac{1}{11}$

Computing expected value and variance leads to

$$E(x) = -\frac{8}{11} + \frac{30}{11} = 2, \qquad E(x^2) = \frac{64}{11} + \frac{90}{11} = \frac{154}{11}$$

$$E(y) = \frac{12}{11} + \frac{10}{11} = 2, \qquad E(y^2) = \frac{144}{11} + \frac{10}{11} = \frac{154}{11}$$

Using the $\mu/\sigma-$ criterion a decision maker would be indifferent.

Risk $\cong$ variability of $\tilde{x}$ below the threshold t.

Semi-Variance:

$$\sigma^{2-}(t) = \int_{-\infty}^{t} (x-t)^2 f(x)dx$$

Variance vs. Semi-Variance:

Variance: mean squared distance to the expected value

Semi-Variance: mean squared distance to the threshold, given that the values are below the threshold.

The decision is made according to the preference function

$$\Phi[\tilde{x}] = \mathbb{E}(\tilde{x}) + \alpha\sigma^{2-}(t)$$

Ex.

Consider the following 2 alternatives:

A		B	
x	p	x	p
0	0.20	-20	0.01
+5	0.30	+7	0.49
+11	0.50	+8	0.50

μ/σ **criterion:**

- B has a higher gain than A:

$$\mathbb{E}(\tilde{x}|A) = 7 < \mathbb{E}(\tilde{x}|B) = 7.23$$

- A has higher risk than B

$$\sigma^2(\tilde{x}|A) = 19 > \sigma^2(\tilde{x}|B) = 7.737$$

- $\Rightarrow$ a risk avers decision maker (i.e. $\alpha < 0$) chooses B, as $\Phi(\tilde{x}|A) = 7 + 19\alpha < 7.23 + 7.737\alpha = \Phi(\tilde{x}|B)$.

"safety first"-criterion

Assume that the threshold is $t = 0$ and $\alpha = -1$.

- A has no risk, as $\tilde{x}$ can never be below the threshold.
- Semi-Variance for B:

$$\sigma^{2-}(t = 0) = .01(-20 - 0)^2 = 4$$

- using the preference function $\Phi(\tilde{x}) = \mathbb{E}(\tilde{x}) - \sigma^{2-}(t = 0)$ one obtains

$$\Phi(\tilde{x}|A) = 7 - 1(0) = 7 \text{ and } \Phi(\tilde{x}|B) = 7.23 - 1(4) = 3.23$$

Portfolio-risiko

Folgende Tabelle gibt die Renditen zweier Wertpapiere A und B sowie die Rendite einer Portfolios P, das sich zu gleichen Teilen aus A und B zusammensetzt, an. Alle Umweltzustände sind gleich wahrscheinlich.

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	μ	σ^2	σ
p_i	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2			
r_A	0.11	0.09	0.250	0.070	-0.02	0.10	0.00760	0.0872
r_B	-0.03	0.15	0.020	0.200	0.06	0.08	0.00708	0.0841
r_P	0.04	0.12	0.135	0.135	0.02	0.09	0.00247	0.0497

Beobachtung: Das Risiko des Portfolios ist kleiner als die Risiken der einzelnen Wertpapiere.

Betrachten dies nun für Portfolios die sich beliebig aus r_a und r_b zusammensetzen und eine beliebige Korrelation aufweisen.