Übungssammlung OR-Methoden im Energie & Umweltmanagement

1 Lineare Optimierung

1.1. Eine Raffinerie garantiert pro Einheit eines Produktes P einen Mindestgehalt b_i von jedem der Bestandteile $B_i (i = 1, \cdots, m)$ und darüber hinaus einen Höchstgehalt v einer Verunreinigung V.

P wird aus den Rohstoffen $R_1, \cdots, R_n$ hergestellt. Eine Einheit von R_k kostet c_k Geldeinheiten und enthält a_{ik} Einheiten von B_i und u_k Einheiten von V. Wieviele Einheiten x_k der Rohstoffe R_k sollen verwendet werden, sodass das damit hergestellte Produkt den garantierten Anforderungen entspricht und die Gesamtkosten der benutzten Rohstoffe minimal sind. Man formuliere die Aufgabe als lineares Optimierungsproblem.

1.2. Eine Raffinerie stellt zwei Produkte P_1 und P_2 her. Aus Rohstoffen R_1, R_2, R_3 werden zunächst Zwischenprodukte Z_1, Z_2 und Z_3 erzeugt und in einem weiteren Schritt werden daraus P_1 und P_2 produziert. Der Bedarf der Rohstoffe zur Erzeugung einer Tonne der Zwischenprodukte sowie der Bedarf der Zwischenprodukte zur Erzeugung einer Tonne der Endprodukte ist aus folgenden Tabellen ersichtlich: (Angaben in Tonnen)

	R_1	R_2	R_3
Z_1	2	3	0
Z_2	1	0	1
Z_3	0	6	3

	Z_1	Z_2	Z_3
P_1	3	2	0
P_2	1	2	1

Die Raffinerie bietet die Endprodukte P_1 und P_2 zu den Verkaufspreisen $p_1 = 36$ und $p_2 = 40$ Euro je Tonne an. Von den Rohstoffen R_1, R_2 bzw. R_3 stehen im zu betrachtenden Planungszeitraum maximal 48, 58.5 bzw. 20 Tonnen zur Verfügung. Die Einkaufspreise betragen $q_1 = 2, q_2 = 1$ und $q_3 = 3$ Euro je Tonne. Es sind die Produktionsmengen so zu bestimmen, dass die Summe der Deckungsbeiträge maximiert wird.

(a) Berechnen Sie den Gesamtbedarf von R_1, R_2 bzw. R_3 zu Herstellung von jeweils einer Tonne von P_1 bzw. P_2. Ermitteln Sie daraus die Herstellkosten von 1 Tonne von P_1 bzw- P_2.

(b) Bestimmen Sie die optimale Lösung graphisch.

(c) Bestimmen Sie die optimale Lösung mithilfe des Simplexalgorithmus.

1.3. Drei Schadstoffe sind die Hauptverantwortlichen für die Luftverschmutzung in der Umgebung eines Stahlwerkes: Staub- und Rußteile, Schwefeloxide und Kohlenwasserstoffe. Aufgrund strengerer gesetzlicher Bestimmungen sind die jährlichen Emissionsraten folgendermaßen zu reduzieren:

Schadstoff	geforderte Reduktion (in 1000 Tonnen)
Staub und Ruß	60
Schwefeloxide	150
Kohlenwasserstoffe	125

Bei der Stahlproduktion gibt es zwei hauptsächliche Emissionsquellen, die Hochöfen für die Herstellung von Roheisen (Typ 1) und die Hochöfen zur Umwandlung von Eisen in Stahl (Typ 2). In beiden Fällen bieten sich als effektivste Wege der Schadstoffminderung an:

- Erhöhung der Schornsteine
- Einbau von Filtern in die Schornsteine
- Verwendung von saubereren Brennstoffen mit höherem Brennwert

Diesen Massnahmen sind hinsichtlich ihres Potentials zur Schadstoffreduktion bei vollständiger Umsetzung folgende technologische Grenzen (in 1000 Tonnen) gesetzt:

	Schornsteine		Filter		Brennstoffe	
Schadstoff	Typ 1	Typ 2	Typ 1	Typ 2	Typ 1	Typ 2
Staub und Ruß	12	9	25	20	17	13
Schwefeloxide	35	42	18	31	56	49
Kohlenwasserstoffe	37	53	28	24	29	20

Bei vollständiger Umsetzung jeder dieser Maßnahmen entstünden dem Unternehmen die in folgender Tabelle zusammengefassten Kosten:

Maßnahme	Typ 1	Typ 2
Schornsteine	8	10
Filter	7	6
Brennstoffe	11	9

Im weiteren wird angenommen, dass die Kosten einer Maßnahme proportional zum Grad ihrer Umsetzung ist. (z.B. wird eine Maßnahme zu 15% umgesetzt, belaufen sich die dadurch entstandenen Kosten auf 15% der in obiger Tabelle angegebenen Maximalkosten.)

Klarerweise ist es dem Unternehmen zu teuer, alle der angeführten Maßnahmen 100-prozentig umzusetzen.

Es soll daher der optimale Realisierungsgrad der einzelnen Maßnahmen bestimmt werden, sodass einerseits die geforderte Schadstoffreduktion ermöglicht wird und andererseits die Kosten minimal sind.

Formulieren Sie ein entsprechendes lineares Optimierungsmodell und lösen Sie es (eventuell unter Zuhilfenahme geegneter Software.)

1.4. Beim Ausbau des Energienetzes eines Gebietes ist zwischen 4 Kraftwerkstypen so auszuwählen, dass die jährlichen Gesamtkosten minimal werden. Für das Gesamtgebiet ist eine jährliche Energieproduktion von 10 000 Einheiten, ein tägliches Mindestaufkommen von 24 Einheiten, sowie die Möglichkeit zur Abdeckung eines täglichen Spitzenbedarfs von 30 Einheiten zu sichern. Die entsprechenden Leistungen der vier Kraftwerkstypen sind der folgenden Tabelle zu entnehmen:

	T_1	T_2	T_3	T_4
Jährliche Energieproduktion	750	2000	800	2000
tägliches Mindestaufkommen	2	5	1	4
tägliche Maximalkapazität	3	7	3	7

Für das Vorhaben stehen Investitionsmittel von 105 Währungseinheiten zur Verfügung. Der Investitionsbedarf je Kraftwerk beträgt bei Typ T_1 10 Einheiten, bei Typ T_2 20, bei Typ T_3 5 und bei Typ T_4 25 Einheiten. Die jährlichen Kosten je Kraftwerk belaufen sich bei Typ T_1 auf 3, bei Typ T_2 auf 6, bei Typ T_3 auf 3 und bei Typ T_4 auf 7 Währungseinheiten. Wieviele Kraftwerke sollen von jedem Typ gebaut werden, damt die jährlich anfallenden Kosten minimal sind?

Formulieren Sie das entsprechende lineare Optimierungsmodell und lösen Sie es (eventuell unter Zuhilfenahme geeigneter Programme).

1.5. Lösen Sie das Problem aus Beispiel (1.1) für folgende Zahlen: $m = 3$, $n = 3$, $\vec{c} = (2, 5, 4)^t$, $\vec{u} = (1, 3, 2)^t$, $v = 5$, $\vec{b} = (5, 1, 3)^t$ und

$$(a_{ik}) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1.6. Lösen Sie das folgende Optimierungsproblem mit der *Groß-M-Methode*:

$$\begin{aligned} &\text{minimiere} && 2x_1 + 3x_2 \\ &\text{unter den Nebenbedingungen:} && x_1 + 2x_2 \geq 3 \\ & && x_1 \geq 1 \\ & && x_1 + x_2 \leq 4 \\ & && x_i \geq 0 \end{aligned}$$

1.7. Eine Recycling Firma betreibt die Wiederverwertung von 4 Sorten fester Abfallstoffe und erzeugt daraus ein verkaufsfähiges Produkt. Je nach Mischung der eingesetzten Altstoffe ergibt sich das Produkt in 3 verschiedenen Qualitätsstufen A, B, C. Zur Erreichung der Qualitätsstandards der 3 Qualitätsstufen müssen bestimmte Mindest- bzw. Höchstgrenzen für die verwendeten Altstoffe eingehalten werden:

Qualität	Spezifikation	Kosten der Einschmelzung pro kg	Verkaufspreis pro kg
A	höchstens 30% von Altstoff 1 mindestens 40% von Altstoff 2 höchstens 50% von Altstoff 3	3.00	8.50
B	höchstens 50% von Altstoff 1 mindestens 10% von Altstoff 2	2.50	7.00
C	höchstens 70% von Altstoff 1	2.00	5.50

Die Anlieferungsmengen und Weiterverarbeitungskosten der Altstoffe sind in folgender Tabelle gegeben:

Altstoff	verfügbare Menge (in kg)	Weiterverarbeitungskosten pro kg
1	3000	3.00
2	2000	6.00
3	4000	4.00
4	1000	5.00

Welche Mengen der einzelnen Qualitätsstufen sollen produziert werden und wie soll das Mischungsverhältnis der eingesetzten Altstoffe gewählt werden, um den Gewinn zu maximieren?

1.8. Ein Heizkraftwerk (erzeugt Strom und Wärme) mit einer Kondensationsturbine und ein Heizwerk (erzeugt nur Wärme) mit einem Heißwassererzeuger versorgen eine Kommune mit Strom und Wärme. Der abzudeckende Bedarf beträgt

- für Strom: $P_{soll} = 80MW$
- für Wärme: $Q_{soll} = 150MW$

Aufgrund von Lieferverträgen kann weiters unter folgenden Bedingungen Strom ge- bzw. verkauft werden:

- Strombezug von maximal $25MW$ zum Preis von $70Euro/MWh$
- Stromlieferung an den Regionalversorger von maximal $50MW$ zum Preis von $50Euro/MWh$.

Der Brennstoffverbrauch m_K für das Kraftwerk bestimmt sich abhängig von der erzeugten elektrischen Leistung P und dem abgegebenen Wärmestrom Q nach

$$m_K = p_0 \times P + q_0 \times Q + r_0$$

mit den Koeffizienten $p_0 = 3t/MWh$, $q_0 = 0.6t/MWh$ und $r_0 = 50t/h$.

Die Stromproduktion der Kondensationsturbine ist durch

$$p_1 \times P + q_1 \times Q \geq r_1$$

nach unten begrenzt, mit den Koeffizienten $p_1 = 1, q_1 = 0.04$ und $r_1 = 50MW$.

Der Brennstoffverbrauch Q_{Br} für das Heizwerk bestimmt sich bezogen auf den abgegebenen Heizwärmestrom Q_H mit einem Wirkungsgrad $\eta = 0.9$ nach

$$Q_{Br} = Q_H/\eta$$

Die Brennstoffpreise betragen $p_K = 15Euro/t$ für den im Kraftwerk verwendeten Brennstoff (entsprechend dem Brennstoffbedarf m_K) und $p_H = 12Euro/MWh$ für den Brennstoffeinsatz Q_{Br} im Heizwerk.

Folgende technische Begrenzungen sollen noch eingehalten werden:

- Die elektrische Leistung P vom Kraftwerk liegt zwischen 15 und $80MW$.
- Der Heizwärmestrom Q vom Kraftwerk ist höchstens $120MW$.
- Der Heizwärmestrom Q_H vom Heizwerk liegt zwischen 25 und $200MW$.
- Der Brennstoffbedarf m_K des Kraftwerks liegt zwischen 120 und $320t/h$.

Das Betriebsergebnis ist für die angegebenen Anforderungen und Randbedingungen zu optimieren.

1.9. (Aus Hillier und Liebermann)

Ein Maßstab für die Wasserqualität eines Flusses ist die Konzentration an gelöstem Sauerstoff. Ein Großteil der in Flüsse eingeleiteten Abwässer ist organischer Natur. Diese Stoffe dienen vielen im Wasser lebenden Organismen als Nahrungsgrundlage. Beim Verwertungsprozess dieser organischen Stoffe entziehen die Organismen dem Fluss Sauerstoff. Je mehr Abwässer also in die Flüsse gelangen, desto größer wird der biochemische Sauerstoffbedarf.

Betrachten wir zwei Flüsse mit den täglichen Wassermengen f_1 und f_2, die zu einem großen Strom zusammenfliesen. An jedem der beiden Flüsse liegt eine Stadt (Stadt 1 bzw. Stadt 2), am großen Strom (i.e. nach dem Zusammenfluss) liegen weiters die Städte 3 und 4. Das Wasser benötigt einen Tag, um von Stadt 1 bzw. Stadt 2 zur Stadt 3 zu fliesen und einen weiteren Tag, um von dort zur Stadt 4 zu gelangen.

D_i bezeichne die Konzentration an gelöstem Sauerstoff direkt oberhalb der Stadt i. B_i bezeichne den Abwassergehalt der Flüsse direkt oberhalb der Stadt i (gemessen durch die entsprechende, für biochemische Abbauprozesse benötigte Konzentration an Sauerstoff.) Die Städte 1 bis 3 leiten täglich Abwässer in den Mengen w_1, w_2 bzw. w_3 in den Fluss. (Diese Mengen sind im Vergleich zu f_1, f_2 vernachlässigbar.)

Leitet die Stadt i ($i = 1, 2, 3$) ihre Abwässer ungeklärt in den Fluss, ergibt sich als entsprechend benötigte Konzentration an Sauerstoff für den biochemischen Abbau U_i; werden die Abwässer vorher geklärt, so läßt sich diese Konzentration auf jeden Wert zwischen L_i und U_i senken. Die Kosten einer Reduktion der biochemisch benötigten Sauerstoffkonzentration betragen pro reduzierter Einheit c_i Geldeinheiten. Um den Städten 3 und 4 noch einen Mindeststandard S der Wasserqualität, d.h. eine gewisse Mindestkonzentration an gelöstem Sauerstoff zu belassen, müssen die Städte ihre Abwassereinleitungen wenigstens teilweise klären. Das Problem liegt nun darin, die Konzentration der von den Städten 1 bis 3 eingeleiteten Abwässer, d.h. den für biochemische Abbauprozesse

benötigten Sauerstoffbedarf so festzulegen, dass die Kosten, die zur Einhaltung des Mindeststandards der Wasserqualität anfallen, minimieren werden.

Als Lösungshilfe für derartige Probleme wurde das folgende biochemische Modell entwickelt. Es wird angenommen, dass täglich eine Wassermenge f den Fluss hinunterfließt, deren Abwasserkonzentration für den biochemischen Abbau einen Sauerstoffbedarf von b erforderlich macht. In den Fluss wird täglich die Abwassermenge w eingeleitet, für deren Abbau eine Sauerstoffkonzentration von x benötigt wird. Unmittelbar nach der Einleitungsstelle erhöht sich dadurch die für den Abbau benötigte Sauerstoffkonzentration auf

$$v_0 = \frac{bf + xw}{f + w} \approx b + \left(\frac{w}{f}\right) x.$$

Die Konzentration an gelöstem Sauerstoff im Wasser wird dadurch allerdings nicht sofort beeinflußt. Die Konzentration an gelöstem Sauerstoff sowie der Abwassergehalt des Flusses verändern sich erst allmählich. Es bezeichen u_0 den Gehalt an gelöstem Sauerstoff im Wasser und v_0 den Abwassergehalt (d.h. die zum Abbau notwendige Sauerstoffkonzentration) an einer bestimmten Stelle des Flusses. Werden in den Fluss keine Abwässer eingeleitet, so weisen die entsprechenden Konzentrationen u_1 und v_1 einen Tag später folgende Werte auf:

$$\begin{aligned} u_1 &= \alpha + \beta u_0 - \gamma v_0 \\ v_1 &= \delta + \epsilon v_0 \end{aligned}$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ bezeichnen positive Parameter, die die zugrundeliegenden biochemischen Prozesse widerspiegeln. Formulieren Sie für dieses Problem ein lineares Optimierungsproblem.

1.10. Betrachten Sie die folgenden primalen Probleme und bilden Sie dazu jeweils das entsprechende duale Problem:

(i)

$$\begin{aligned} \text{maximiere:} \quad & c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \\ \text{unter den Nebenbedingungen:} \quad & \\ a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n &\leq b_i, \quad \forall i = 1, \cdots, m-1 \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m, \\ x_j &\geq 0, \quad \forall j = 1, \cdots n. \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \text{maximiere:} \quad & c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \\ \text{unter den Nebenbedingungen:} \quad & \\ a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n &\leq b_i, \quad \forall i = 1, \cdots, m \\ x_j &\geq 0, \quad \forall j = 2, \cdots n. \end{aligned}$$

(i.e. keine Nichtnegativitätsbedingung für x_1.)

(iii)

$$\begin{aligned} \text{minimiere:} \quad & c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \\ \text{unter den Nebenbedingungen:} \quad & \\ a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n &\leq b_i, \quad \forall i = 1, \cdots, m \\ x_j &\geq 0, \quad \forall j = 1, \cdots n. \end{aligned}$$

2 Transportprobleme

2.1. Betrachten Sie ein Transportproblem mit 4 Produzenten $P_1, \cdots, P_4$ und 3 Verbrauchern $V_1, \cdots, V_3$, wobei die Kosten sowie die Nachfragemengen und Angebotsmengen folgendermaßen gegeben sind:

	V_1	V_2	V_3	Angebot
P_1	5	6	4	10
P_2	2	7	1	20
P_3	3	4	5	20
P_4	2	1	3	10
Nachfrage	25	15	20	

(a) Bestimmen Sie eine zulässige Startlösung mit der Nordwest-Eckenregel.

(b) Bestimmen Sie eine zulässige Startlösung mit der Matrix-Minimum-Methode.

(c) Bestimmen Sie eine zulässige Startlösung mit hilfe der Vogelschen Approximation.

(d) Bestimmen Sie die optimale Lösung.

(e) Vergleichen Sie die Kosten der unter (a)-(c) bestimmten Startlösungen mit der optimalen Lösung.

2.2. Eine Behörde schreibt Aufträge zur Belieferung von vier staatlichen Depots $D_j, (j = 1, \cdots, 4)$ mit Benzin aus. Die Depots besitzen folgenden Treibstoffbedarf:

$$D_1 : 12 \text{ ME} \qquad D_2 : 17 \text{ ME} \qquad D_3 : 10 \text{ ME} \qquad D_4 : 11 \text{ ME}$$

Um die Aufträge bewerben sich zwei Lieferanten $L_i, (i = 1, 2)$. Jeder Lieferant gibt ein Angebot ab. Das Angebot enthält zum einen die genaue Menge an Benzin, die der Unternehmer zu liefern wünscht; und zwar bieten Lieferant L_1 20 ME und Lieferant L_2 30 ME Benzin an. Zum anderen nennt jeder Unternehmer den Preis, den er für die Belieferung des Depots D_j mit 1 ME Treibstoff fordert. Die Preise sind in der folgenden Matrix enthalten:

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 5 & 4 \\ 3 & 7 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

Die Behörde möchte die Aufträge so vergeben, dass der Bedarf der Depots zu minimalen Kosten gedeckt wird.

Formulieren Sie den dargestellten Sachverhalt als Transportproblem und bestimmen Sie die optimale Lösung.

(ME $\cdots$ Mengeneinheit)

2.3. Betrachten Sie nochmals Beispiel (2.2) mit folgender Modifikation:

Da die Regierung bestrebt ist, die Depots nicht in eine zu starke einseitige Abhängigkeit von einem Lieferanten geraten zu lassen, wird die mögliche Liefermenge jedes Unternehmens

für jedes Depot auf ein Maximum beschränkt. Die maximalen Liefermengen κ_{ij} der Unternehmen für jedes Depot sind in der folgenden Matrix angegeben:

$$\kappa = \begin{pmatrix} 8 & 12 & 7 & 6 \\ 7 & 14 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

Formulieren Sie den dargestellten Sachverhalt als (kapazitiertes) Transportproblem. Welche Auswirkung hat diese Einschränkung auf die optimale Lösung?

2.4. (Bsp. aus Hillier & Liebermann)

Die Versorgung einer Region mit Wasser erfolgt aus den drei Flüssen Colombo, Sacron und Calorie River. Hauptabnehmer sind die Wasserwerke der Städte Berdoo, Los Devils, San Go und Hollyglass. Prinzipiell kann jede Stadt mit Wasser aus jedem der drei Flüsse versorgt werden, mit der Ausnahme, dass Hollyglass kein Wasser aus dem Calorie River beziehen kann.

Die Kosten pro 1000 m^3 Wasser, der Vorrat der drei Flüsse, der Mindestbedarf sowie der Gesamtbedarf sind in folgender Tabelle zusammengefasst:

	Berdoo	Los Devils	San Go	Hollyglass	Vorrat
Colombo R.	16	13	22	17	50
Sacron R.	14	13	19	15	60
Calorie R.	19	20	23	-	50
Basisbedarf	30	70	0	10	
Gesamtnachfrage	50	70	30	∞	

Der gesamte Wasservorrat der Flüsse soll in die Versorgung der Städte einfließen. Der Basisbedarf der Städte muss immer gedeckt sein. Gesucht ist nun der Wasserverteiungsplan, der die Gesamtkosten zur Versorgung der Städte minimiert.

2.5. Ein Kraftwerksverbund kann mit 4 Kraftwerken vier Regionen mit Energie versorgen. In folgender Tabelle sind die benötigten und verfügbaren Energiemengen angegeben, sowie der Gewinn pro gelieferter Einheit Energie von Kraftwerk K_i an Region R_j.

	R_1	R_2	R_3	R_4	Angebot
K_1	12	8	9	11	150
K_2	9	7	8	12	200
K_3	10	9	7	10	120
K_4	8	8	7	11	180
Nachfrage	120	100	250	130	

Zuviel produzierte Energie kann mit einem Gewinn von 8 GE pro gelieferter Einheit Energie weiterverkauft werden.

Ziel ist es, den Gesamtgewinn zu maximieren.

(a) Wie müssen die Algorithmen zum Lösen von Transportproblemen angepasst werden, um dieses Maximierungsproblem zu lösen?

(b) Bestimmen Sie eine zulässige Startlösung mit der Nordwest-Eckenregel.

(c) Bestimmen Sie eine zulässige Startlösung mit der Matrix-Minimum-Methode.

(d) Bestimmen Sie eine zulässige Startlösung mit hilfe der Vogel'schen Approximation.

(e) Bestimmen Sie die optimale Lösung.

(f) Vergleichen Sie die Kosten der unter (b)-(d) bestimmten Startlösungen mit der optimalen Lösung.

3 (Gemischt) Ganzzahlige Optimierung

3.1. Betrachten Sie Beispiel (1.2) und nehmen Sie nun an, dass nur ganze Tonnen produziert bzw. verkauft werden können.

Verwenden Sie zur Lösung des Problems ein Branch & Bound-Verfahren.

(Die relaxierten Teilprobleme können graphisch gelöst werden.)

3.2. Die Behörde einer Region hat beschlossen, eine (und nur eine) Müllverbrennungsanlage (MVA) zu bauen. In Frage kommen zwei Standorte, Neustadt oder Althofen, es ist jedoch noch unklar, ob ein oder zwei Blöcke gebaut werden sollen. Um die bei der Verbrennung entstehende Energie zu nutzen wird auch an den Bau einer Fernwärmeanlage (an dem Ort der MVA) gedacht. Aus ökonomischen Gründen steht jedoch fest, dass die Fernwärmeanlage nur dann gebaut werden kann, wenn 2 Blöcke der MVA realisiert werden.

Die folgende Tabelle gibt die Errichtungskosten bzw. den Kapitalwert der einzelnen Investitionen an:

	Kapitalwert	erforderliches Kapital
1 Block in Althofen	5 Millionen	18 Millionen
2 Blöcke in Althofen	9 Millionen	25 Millionen
1 Block in Neustadt	4 Millionen	15 Millionen
2 Blöcke in Neustadt	8 Millionen	24 Millionen
Fernwärmeanlage in Althofen	7 Millionen	10 Millionen
Fernwärmeanlage in Neustadt	4 Millionen	6 Millionen

Das insgesamt verfügbare Kapital beträgt 30 Millionen Euro.

(a) Formulieren Sie ein entsprechendes lineares Optimierungsmodell und lösen Sie es (etwa unter Zuhilfename geeigneter Software)

(b) Angenommen, verfügbares Kapital, das nicht in den Bau der MVA (bzw. der Fernwärme) investiert wurde, kann in alternative Projekte investiert werden. Wie kann das Model angepasst werden, um dies zu berücksichtigen?

3.3. Ein Gebiet kann von drei Kraftwerken mit Energie versorgt werden. Die leistungsabhängigen Betriebskosten c_i jedes der drei Kraftwerke setzt sich aus einem fixen Sockelbetrag α_i und einem leistungsabhängigen Betrag $\beta_i \times x_i$ zusammen, wobei x_i die zu bestimmende Leistung des Kraftwerks i bezeichnet. Es gilt also

$$c_i(x_i) = \begin{cases} \alpha_i + \beta_i \times x_i & \text{falls} \quad x_i > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Leistungsobergrenzen $\bar{L}_i$ sowie die Kostenparameter α_i und β_i der drei Kraftwerke sind in folgender Tabelle angegeben:

	Kraftwerk		
	1	2	3
$\bar{L}_i$	150	100	200
α_i	200	250	150
β_i	10	9	12

(a) Bestimmen Sie den optimalen Kraftwerkseinsatz, wenn der Gesamtbedarf 250 MW beträgt. (Der Verkaufspreis der Energie an die Kunden ist konstant und braucht in den Berechnungen nicht berücksichtigt zu werden.)

(b) Bestimmen Sie den optimalen Kraftwerkseinsatz, wenn der Gesamtbedarf 250 MW beträgt und nicht benötigte Energie zum Preis von 15 GE/MWh an ein Unternehmen, das ein anderes Gebiet mit Strom versorgt, verkauft werden kann.

(c) Betrachen Sie die Situation aus (b). Ab welchem Verkaufspreis an ein anderes Unternehmen ist es optimal, alle drei Kraftwerke zu betreiben?

4 Lineare stochastische Optimierung

4.1. Eine Raffinerie erzeugt aus 2 Rohölsorten R_1 bzw. R_2 die Destillate D_1 und D_2. Die Einkaufkosten betragen 3 GE für eine ME von R_1 und 4 GE je ME von R_2.

Der Bedarf an den Rohölen zur Produktion einer Einheit der Destillate ist in folgender Tabelle zusammengefasst:

	R_1	R_2
D_1	2	1
D_2	1	3

Der Bedarf an den Destillaten ist unsicher und folgendermaßen gegeben:

$P\{\text{Bedarf an } D_1 = 10\} = 0.6$	$P\{\text{Bedarf an } D_1 = 15\} = 0.4$
$P\{\text{Bedarf an } D_2 = 8\} = 0.3$	$P\{\text{Bedarf an } D_2 = 12\} = 0.7$

Weiters sei der Bedarf an D_1 und D_2 voneinander unabhängig.

Nicht gedeckter Bedarf führt zu Strafzahlungen von 15 Geldeinheiten je fehlender Einheit von D_1 bzw. zu 20 GE je ME von D_2.

Bestimmen Sie jenen Produktionsplan, der die Produktionskosten zuzüglich der erwarteten Strafzahlungen minimiert, unter der Kapazitätsbeschränkung, dass maximal 80 Einheiten Rohöl verarbeitet werden können.

4.2. Wie kann der Verkaufspreis der Produkte D_1 und D_2 in Beispiel (4.1) berücksichtigt werden?

Erweitern Sie das Beispiel (4.1) dahingehend, dass eine Einheit von D_1 zum Preis von 12 GE und eine Einheit von D_2 zum Preis von 18 GE verkauft wird. Als Zielfunktional soll nun der erwartete Verkaufserlös abzüglich der erwarteten Strafzahlungen und der Produktionskosten maximiert werden. (Für produzierte aber nicht verkaufte Produkte fallen nur Produktionskosten an, bleiben sonst aber unberücksichtigt.)

4.3. Ein Energieversorgungsunternehmen kann den Bedarf an Strom durch ein kalorisches Kraftwerk und ein Wasserkraftwerk abdecken.

Das kalorische Kraftwerk hat eine Leistung von 3 MW, und pro Betriebsstunde fallen Brennstoffkosten in der Höhe von 6 GE an. Die Kosten für den Betrieb des Wasserkraftwerkes sind vernachlässigbar. Die Leistung des Wasserkraftwerkes hängt von den Niederschlagsmengen ab. Aufgrund der Wettervorhersage im Planungszeitraum weiss man, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von 40% die Leistumg 1MW betragen wird und mit 60% Wahrscheinlichkeit 1.5 MW.

Der Bedarf im Planungszeitraum von 200 Stunden beträgt mit einer Wahrscheinlichkeit von 50% 500 MWh, mit einer Wahrscheinlichkeit von 50% beträgt er 350 MWh. Durch den Betrieb der Kraftwerke nicht gedeckter Bedarf muss von einem anderen Energieversorger zu einem Preis von 4 GE pro MWh zugekauft werden.

Formulieren und lösen Sie ein stochastisches lineares Optimierungsproblem zur Bestimmung der Betriebsstunden der beiden Kraftwerke, wenn die Kosten und die erwarteten Zahlungen für nicht gedeckten Bedarf minimiert werden sollen. (Der Bedarf und die Leistung des Wasserkraftwerkes sind voneinander unabhängige Zufallsvariable!)

5 Dynamische Optimierung

5.1. Ein Warmwasser-Verdrängungsspeicher mit $200m^3$ Fassungsvermögen soll in der Spitzenbelastungszeit für die Elektroenergie-Erzeugung entladen werden. Das Laden bzw. Entladen soll jeweils mit gleichen Volumenströmen von $50m^3/h$ erfolgen. Durch das Entladen erfolgt eine Gutschrift für eingesparte Wärmeerzeugung, für das Laden entstehen Kosten in gleicher Höhe.

Es wird angenommen, dass innerhalb einer vollen Stunde jeweils 3 Strategien möglich sind:

- Laden (Ladevolumen = $50m^3$)
- Entladen (Entladevolumen = $50m^3$)

- Keine Änderung des Ladezustandes

Zum Anfangszeitpunkt ist der Speicher mit $150m^3$ geladen und er soll innerhalb der nächsten 6 Stunden entladen werden.

Bestimmen Sie mittels dynamischer Optimierung die beste Strategie, wenn die Kosten bzw. Gutschriften folgendermaßen gegeben sind:

Stunde	Kosten bzw. Gutschrift
1. Stunde	± 2.21
2. Stunde	± 2.67
3. Stunde	± 2.95
4. Stunde	± 2.98
5. Stunde	± 2.74
6. Stunde	± 2.31

5.2. Der Tankwagenfahrer Erwin G. eines Brennstoffhändlers steht jeden Tag erneut vor dem Problem, eine Anzahl von Kunden in verschiedenen Orten mit Heizöl zu beliefern, sodass die insgesamt zurückgelegte Entfernung (und damit die angefallenen Fahrkosten) so gering wie möglich ist.

Da das Fassungsvermögen des Tankwagens klein ist, kann Erwin nur wenig Kunden beliefern, bevor er wieder zum Ausgangspunkt zurückkehren muss. Daher ist es möglich eine optimale Lösung mithilfe der dynamischen Optimierung zu bestimmen.

Lösen Sie für Erwin das Problem mit 3 Besuchsorten und folgenden Entfernungen

von/nach	Ort 1	Ort 2	Ort 3
Tanklager	3	5	4
Ort 1		3	4
Ort 2			2

(a) Gehen Sie davon aus, dass mit einer Tankfüllung alle drei Kunden beliefert werden können.

(b) Wie ändert sich die Lösung, wenn mit einer Tankfüllung nur zwei der drei Kunden beliefert werden können.

5.3. Frau Gudrun S. betreibt eine Tankstelle. Sie kann den Bedarf b_k (jeweils in 1000 Litern Treibstoff) für die kommenden 4 Wochen $k = 1, \cdots, 4$ ziemlich genau abschätzen. Über den Planungszeitraum ist der Verkaufspreis konstant, nur der Einkaufspreis p_k je 1000 Liter Treibstoff variiert. Zusätzlich zum Einkaufspreis verlangt der Lieferant noch fixe (i.e. mengenunabhängige) Bestellkosten ϕ_k.

Woche k	1	2	3	4
b_k	2	5	7	3
p_k	20	22	23	19
ϕ_k	2	2	3	1

Der Tank ist zu Beginn mit 2000 Litern befüllt, er hat eine Gesamtkapazität von 15000 Litern und soll wegen einer Tankinspektion zum Ende des Planungszeitraums geleert sein.

Bestimmen Sie die Bestellmengen, die Frau S. zu Beginn jeder Woche bestellen muss, um möglichst kostengünstig einzukaufen. Dabei ist zu beachten, dass jeweils nur Vielfache von 1000 Litern und maximal 5000 Liter auf einmal geliefert werden können.

5.4. Betrachten Sie ein Wasserreservoir an einem Fluss. Aufgrund schwerer Regenfälle im Einzugsgebiet des Flusses kann man die in den nächsten Tagen in das Reservoir einfliesenden Wassermengen genau vorhersagen. Die zufliesenden Mengen (in Mio m^3) sind in folgender Tabelle angegeben:

1. Tag	2. Tag	3. Tag	4. Tag	5. Tag
2	4	6	5	3

Der Anfangsfüllstand z_0 des Reservoirs beträgt 18 Mio.m^3, die Obergrenze des Reservoirs beträgt 25 Mio.m^3. Ziel ist es, durch Ablassen von Wasser den Füllstand möglichst nahe am optimalen Füllstand von 20 Mio. m^3 zu halten wobei eine quadratische "Kostenfunktion" in Betracht gezogen wird. Es soll also das Funktional

$$\sum_{i=1}^{5}(z_i - 20)^2$$

minimiert werden, wobei z_i den Füllstand des Reservoirs am Tag i bezeichnet.

Die täglich abzulassenden Mengen r_i müssen im Bereich $1 \leq r_i \leq 4$ (jeweils in Mio. m^3) liegen. Bestimmen Sie die Ablassmengen r_i^* die das Zielfunktional minimieren.

Hinweise:

- Nehmen Sie an, dass r_i nur die Werte $1, 2, 3$ oder 4 annehmen kann.
- Um den Rückwärtsalgorithmus anwenden zu können, ist es sinnvoll z_0 als letzte Stufe und z_5 als erste Stufe anzusehen.

6 Stochastische dynamische Optimierung

6.1. Lösen Sie das folgende Optimierungsproblem mit Hilfe eines stochastischen Entscheidungsbaumes:

Ein Erdölunternehmen steht vor der Frage, ein Gebiet auf mögliche Erdölvorkommen zu untersuchen und gegebenenfalls Bohrungen durchzuführen.

Zunächst muss die Entscheidung getroffen werden, ob eine Voruntersuchung, die Kosten in der Höhe von 100000 \$ verursacht, durchgeführt werden soll. Es wird angenommen, dass diese Voruntersuchung in 20 % aller Fälle ein überaus ertragreiches Ölfeld voraussagt, in 30 % ein mäßig ertragreiches Ölfeld und in 50% der Fälle einen vernachlässigbaren Ertrag prognostiziert.

Aus früheren Untersuchungen kennt man über die Verlässlichkeit dieser Voruntersuchung die folgenden bedingten Wahrscheinlichkeiten: Die Prognose eines überaus ertragreichen

Ölfeldes ist zu 70% richtig, in 30% der Fälle jedoch stellt sich das Ölfeld als nur mässig ertragreich heraus.

Von der Voruntersuchung als "mäßig ertragreich" klassifizierten Ölfelder sind zu 20% nicht ertragreich, zu 10% überaus ertragreich, und in den restlichen 70% tatsächlich mäßig ertragreich.

90% der durch die Voruntersuchung als "nicht ertragreich" klassifizierten Ölfelder sind tatsächlich nicht ertragreich, die restlichen 10% sind mässig ertragreich.

In einem nächsten Schritt muss nun entschieden werden, ob das Ölfeld erschlossen und Bohrungen durchgeführt werden sollen. Dabei ist davon auszugehen, dass der Gewinn eines überaus ertragreichen Ölfeldes bei 5 000 000 $, bei einem mäßig ertragreichen Ölfeld bei 3 000 000 $ liegt. Bei einem nicht ertragreichen Ölfeld fallen Kosten in der Höhe von 500 000 $ an. (In diesen Gewinn/Kosten-Werten sind die Kosten der Voruntersuchung **nicht** inkludiert!)

Welche Entscheidungen sind zu treffen, wenn der erwartete Gewinn maximiert werden soll?

6.2. Der Energiebedarf im den Entscheidungen zugrundeliegenden Zeitraum ist zufällig und kann durch folgende Zufallsvariable beschrieben werden: mit Wahrscheinlichkeit von 50 % beträgt der Energiebedarf 150 Einheiten, mit 20% Wahrscheinlichkeit 100 Einheiten und die Wahrscheinlichkeit für einen Bedarf von 200 Einheiten beträgt 30%. Der Gewinn $G(x)$ für x Einheiten gelieferter Energie ist durch folgende Beziehung gegeben: $G(x) = (x-20)*1000$. (Zur Vereinfachung wird angenommen, dass **keine** Kosten entstehen, falls der Bedarf die angebotene Menge an Energie übersteigt.)

Die Kapazität des verfügbaren Kraftwerks liegt zur Zeit bei 130 Einheiten. Der Kraftwerksbetreiber überlegt daher, durch einen Bau eines weiteren Generators die Kapazität auf 200 Einheiten zu erhöhen. Dazu ist es jedoch nötig, zunächst den Bau zu planen und um eine Bewilligung durch die entsprechenden Behörden anzusuchen. Dieser Vorgang verursacht Kosten in der Höhe von 5000 GE. Von vergleichbaren Projekten weiss man, dass die Behörde mit Wahrscheinlichkeit von 60% den Bau genehmigt, mit 40% aber untersagt. Der Bau verursacht Kosten in der Höhe von 50000 GE.

Als Alternative könnte durch kleinere Umbauarbeiten (zu Koszen von 10000 GE) die Kapazität auf 150 Einheiten erhöht werden. Für diese kleineren Arbeiten ist keine Bewilligung erforderlich.

Welche Entscheidungen sind zu treffen, wenn der erwartete Gewinn maximiert werden soll? (In Stufe 1 muss zunächst entscheiden werden, ob der Plan für einen Großumbau gemacht und eingereicht werden soll. In einer zweiten Stufe muss entscheiden werden, ob kein Umbau, ein kleiner oder ein großer Umbau durchgeführt werden soll.)

6.3. Stellen Sie sich vor, Sie besitzen 5000 $, die Sie investieren können. Sie haben die Gelegenheit, diesen Betrag am Anfang jedes der drei folgenden Jahre in eine von zwei Anlagemöglichkeiten (A oder B) zu investieren. Beide Investitionen führen zu unsicheren Rückflüssen. Bei Kapitalanlage A verliert man entweder sein gesamtes Geld, oder (mit größerer) Wahrscheinlichkeit bekommt man 10000$ (der Gewinn beträgt 5000$) am Ende des Jahres zurück. Bei Investition B bekommt man entwedergerade die eingesetzten 5000 $ oder (mit geringerer Wahrscheinlichkeit) 10000$ am Ende des Jahres zurück. Die Wahrscheinlichkeiten für diese Ereignisse lauten:

Investition	Rückfluss	Wahrscheinlichkeit
A	0	0.4
	10000	0.6
B	5000	0.9
	10000	0.1

Es ist nur erlaubt, jedes Jahr (höchstens) eine Investition zu tätigen und man kann jedes Mal nur 5000$ anlegen. (Jeder zusätzliche angesammelte Geldbetrag ist zur anderweitigen Verfügung übrig.)

(a) Verwenden Sie die dynamische Optimierung, um die Investitionspolitik zu finden, die den erwarteten Geldbetrag maximiert, den man nach drei Jahren hat!

(b) Verwenden Sie die dynamische Optimierung, um die Investitionspolitik zu finden, die die Wahrscheinlichkeit dafür maximiert, dass man nach drei Jahren mindestens 10000$ besitzt!

6.4. Der Betreiber einer ölbetriebenen Heizanlage will für die nächsten drei Monate die Bestellmengen bestimmen. Am Ende des dritten Monats soll der Tank geleert sein.

Der Verbrauch der Anlage ist bekannt und deterministisch und beträgt 1500 Liter im Monat. Die Preise $\tilde{p}_i$ sind stochastisch und deren Auspägung erst jeweils am Beginn des Monats zum Zeitpunkt der Bestellung bekannt.

$\tilde{p}_1$	Wahrscheinlichkeit	$\tilde{p}_2$	Wahrscheinlichkeit	$\tilde{p}_3$	Wahrscheinlichkeit
0.56	0.3	0.52	0.5	0.60	0.3
0.63	0.5	0.60	0.3	0.65	0.5
0.71	0.2	0.75	0.2	0.70	0.2

Weiters können nur Vielfache von 500 Litern bestellt werden und bei jeder Bestellung ist eine zusätzliche Pauschale in der Höhe von 100 GE zu entrichten. Das Fassungsvermögen des Tankes beträgt 4000 Liter.

Bestimmen Sie die optimalen Bestellmengen (die vom momentanen Füllstand des Tankes und vom Preis zum Zeitpunkt der Bestellung abhängen) zum Beginn jeder Periode, die die erwarteten Kosten minimieren.

6.5. Ein Tankstellenbesitzer will für die nächsten drei Perioden die Bestellmengen bestimmen. Wegen einer Tankinspektion soll am Endzeitpunkt der Tank leer sein, wobei etwaige Restmengen abgepumpt und entsorgt werden müssen, was Kosten in der Höhe von $0.02x$ für x Liter Treibstoff beträgt. Die Einkaufspreise p_i^E bzw. Verkaufspreise p_i^V je Liter sind deterministisch vorgegeben, die nachgefragten Mengen $\tilde{d}_i$ sind zufällig.

Periode	p_i^E	p_i^V	$\tilde{d}_1$	p	$\tilde{d}_2$	p	$\tilde{d}_3$	p
1	0.48	0.62	3000	0.3	2000	0.3	4000	0.1
2	0.50	0.60	4000	0.5	4000	0.3	5000	0.7
3	0.54	0.63	5000	0.2	6000	0.4	8000	0.2

Weiters können nur Vielfache von 1000 Litern bestellt werden und bei jeder Bestellung ist eine zusätzliche Pauschale in der Höhe von 150 GE zu entrichten. Das Fassungsvermögen des Tankes beträgt 12000 Liter.

Bestimmen Sie die optimalen Bestellmengen (die vom momentanen Füllstand des Tankes abhängen) zum Beginn jeder Periode, sodass der erwartete Gewinn maximiert wird.

7 LQ-Modelle für das Problem des Reservoirmanagements

7.1. Betrachten Sie das im Artikel von Özelkan et al. ("Linear quadratic dynamic programming for water reservoir management", Appl. Math. Modelling 1997,21) formulierte LQ-Modell mit "Policy tracking".

$$\min \mathbb{E}\left\{(\vec{x}_K - \underline{\vec{x}}_K)' Q_K (\vec{x}_K - \underline{\vec{x}}_K) + \sum_{k=0}^{K-1} [(\vec{x}_k - \underline{\vec{x}}_k)' Q_k (\vec{x}_k - \underline{\vec{x}}_k) + (\vec{u}_k - \underline{\vec{u}}_k)' R_k (\vec{u}_k - \underline{\vec{u}}_k)]\right\}$$

unter der Dynamik

$$\vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k + B_k \vec{u}_k + \vec{w}_k$$

Dabei ist ($\vec{x}_k$ der Systemzustand, $\vec{u}_k$ die Kontrolle und $\vec{w}_k$ eine zufällige "Störung". Die $\vec{w}_k$ sind unabhängig und identisch verteilt mit Erwartungswert $\vec{\mu}$.

Zeigen Sie, dass dieses Problem unter der Annahme

$$B_{k+1} \underline{\vec{u}}_{k+1} = B_k \underline{\vec{u}}_k$$

mittels der Transformation

$$\begin{aligned} \vec{y}_k &= \vec{x}_k - k(\vec{\mu} + B_k \underline{\vec{u}}_k) \\ \underline{\vec{y}}_k &= \underline{\vec{x}}_k - k(\vec{\mu} + B_k \underline{\vec{u}}_k) \\ \vec{v}_k &= \vec{u}_k - \underline{\vec{u}}_k \\ \vec{z}_k &= \vec{w}_k - \vec{\mu} \end{aligned}$$

zu folgendem LQ-Modell äquivalent ist:

$$\min \mathbb{E}\left\{(\vec{y}_K - \underline{\vec{y}}_K)' Q_K (\vec{y}_K - \underline{\vec{y}}_K) + \sum_{k=0}^{K-1} [(\vec{y}_k - \underline{\vec{y}}_k)' Q_k (\vec{y}_k - \underline{\vec{y}}_k) + \vec{v}_k' R_k \vec{v}_k]\right\}$$

unter der Dynamik

$$\vec{y}_{k+1} = \vec{y}_k + B_k \vec{v}_k + \vec{z}_k$$

($\vec{y}_k \cdots$ Zustand, $\vec{v}_k \cdots$ Kontrolle, $\vec{z}_k \cdots$ zufällige "Störung", $\mathbb{E}\vec{z}_k = \vec{0}$, $\vec{z}_k$ unabhängig.)

7.2. Betrachten Sie folgendes Wasserreservoirproblem:

$$\min \mathbb{E}\left\{\sum_{k=0}^{K-1} \alpha(x_k - \underline{x})^2 + \beta(u_k - \underline{u})^2\right\}$$

unter der Dynamik $x_{k+1} = x_k - u_k + w_k$.
x_k bezeichnet dabei den Inhalt des Wasserreservoirs, u_k die abzulassende Menge und w_k zufällige Zu- bzw. Abflüsse, wobei $\mathbb{E}w_k = \mu$ gilt. Die "Targets" $\underline{x}$ bzw. $\underline{u}$ sind konstant.

Zeigen Sie, dass im stationären Fall die optimale Lösung durch

$$u_k^* = \underline{u} + \frac{M}{M+\beta}(x_k - \underline{x}), \quad \text{mit } M = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\alpha\beta}}{2}$$

gegeben ist.

Hinweis: Die Riccati Gleichung

$$M = A'[M - MB(B'MB + R)^{-1}B'M]A + Q$$

vereinfacht sich im eindimmensionalen Fall sehr stark.

8 Nichtlineare Optimierung

8.1. Das Kunststoffmantelrohr einer Fernwärmeleitung besteht aus einem inneren Stahlrohr mit einem Durchmesser $d_i = 10cm$, einer Wärmeisolierung der Dicke d und einem Mantelrohr mit Durchmesser $d_a = d_i + 2d$.

Die Wärmeleitfähigkeit der Dämmung ist mit $\lambda = 0.03W/(K \times m)$ angegeben. (i.e. 0.03 Watt pro 1 Grad Kelvin Temperaturunterschied pro 1 Meter Dicke der Isolierung.) Die wirksame Temperaturdifferenz über die Dämmung soll $\Delta T = 100K$ betragen.

Der Wärmeverlust Q (pro Meter Fernwärmeleitung) wird mit folgender Formel berechnet:

$$Q = \frac{2\pi\lambda\Delta T}{\log(d_a/d_i)}$$

Die durch die Wärmeisolierung verursachte Erhöhung der Investitionskosten betragen $I = 50\log(d_a/d_i)$Euro pro verlegtem Meter der Wärmeleitung. Der Wärmeverlust wird durch Kosten von $k = 20$Euro$/MWh$ berücksichtigt.

Bestimmen Sie die optimale Dicke der Isolierung, wenn die Gesamtkosten, die sich aus den Kosten für den Wärmeverlust und den annuisierten Investitionskosten zusammensetzen, minimiert werden sollen. Dabei ist davon auszugehen, dass die Fernwärmeleitung 5000 Stunden im Jahr in Betrieb ist und der Annuitätsfaktor zur Bestimmung der annuisierten Investitionskosten $a = 0.1$/Jahr beträgt.

(Hinweis: Als Zielfunktional erhält man also

$$k \times Q \times 5000 + a \times I$$

Weiters ist es zweckmäßig, die Variablensubstitution $x = \log(d_a/d_i)$ vorzunehmen.)

8.2. Ein Heizkraftwerk mit einer Dampfentnahme-Kondensationsturbine soll ein $l = 2.5km$ entferntes Wohngebiet, das einen Wärmebedarf von $Q = 6MW$ hat, über ein temperaturgeregeltes erdverlegtes Zweileiternetz mit Heißwasser versorgen. Die Rücklauftemperatur soll $T_R = 60°C$ betragen.

Die Investitionskosten I für ein Leiterpaar betragen pro m Trasse, abhängig vom Rohrdurchmesser d

$$I = I_r + I_d \times d$$

wobei die Koeffizienten durch $I_r = 450$ Euro$/m$ bzw. $I_d = 750$ Euro$/m^2$ gegeben sind.

Die Vorlauftemperatur T beeinflusst den Koppelprozess im Heizkraftwerk. Die Kosten K_B aufgrund der Mindererzeugung von Elektoenergie durch Wärmeauskopplung bei $T > T_K$ soll nach der Formel

$$K_B = \eta \times p \times Q \times t_V \times \frac{T - T_K}{T}$$

bestimmt werden. Dabei bezeichnet

$\eta = 1/3$	...	Gütegrad
$p = 0.07$ Euro$/kWh$	...	Strompreis
$t_V = 2200$Stunden/Jahr	...	Voll-Laststunden
$T_K = 303.15K$	...	Kondensationstemperatur in der Turbine

Bestimmen Sie den Rohrdurchmesser d und die optimale Vorlauftemperatur T, die die Jahreskosten minimieren. Dabei setzen sich die Jahreskosten additiv aus den annuisierten Investitionskosten (Annuitätsfaktor $a = 0.1$/Jahr), den Kosten der Wärmeauskopplung K_B und den Kosten der Pumparbeit K_P zusammen.

Für die Kosten der Pumparbeit gilt:

$$K_P = \frac{\alpha}{d^5(T - T_R)^3}$$

wobei der Kostenparameter α durch $\alpha = 164831 m^5 K^3$Euro/Jahr gegeben ist.

(Hinweis: 0 Grad Kelvin ($0K$ = absoluter Nullpunkt) entspricht -273.15 Grad Celsius ($-273.15°C$). Der Temperaturunterscheid von 1 Grad Kelvin entspricht dem Temperaturunterschied von 1 Grad Celsius.)

8.3. Betrachten Sie ein Wasserkraftwerk, das aus einem Speichersee, einer Oberstufe, einem Ausgleichsbecken und einer Unterstufe besteht. Sowohl in der Oberstufe als auch in der Unterstufe stehen je zwei Generatoren zur Stromerzeugung zu Verfügung. Alle 4 Generatoren sind durch quadratische "Kosten"kurven charakterisiert, i.e. die zur abgegebenen elektrischen Leistung P_i (in MW) benötigte Wasserdurchflussmenge Q_i (in m^3/s) ist durch

$$Q_i = \alpha_i + \beta_i P_i + \gamma_i P_i^2$$

gegeben.

Das Kraftwerk soll nun eine elektrische Leistung von $200MW$ liefern. Weiters soll der Wasserinhalt des Ausgleichsbecken konstant bleiben. Wie muss nun die zu liefernde Leistung auf die einzelnen Generatoren verteilt werden, wenn möglichst wenig Speicherwasser eingesetzt werden soll?

Formulieren Sie ein entsprechendes Optimierungsproblem und lösen Sie es für die folgenden Parameterwerte:

Parameter	Oberstufe		Unterstufe	
	Generator 1	Generator 2	Generator 3	Generator 4
α_i	1.070	0.920	0.160	0.190
β_i	0.150	0.170	0.100	0.100
γ_i	0.002	0.001	0.001	0.002

8.4. Gegeben sei das folgende nichtlineare Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} & \max \tfrac{x_1}{x_2+1} \\ \text{unter den Nebenbedingungen} \quad & x_1 - x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

(i) Verwenden Sie die Kuhn-Tucker Bedingungen, um zu zeigen, dass $(x_1, x_2) = (4, 2)$ nicht optimal ist.

(ii) Leiten Sie eine Lösung ab, die die Kuhn-Tucker Bedingungen erfüllt.

(iii) Zeigen Sie, dass obiges Problem durch eine geeignete Variablentransformation in ein lineares Optimierungsproblem übergeführt werden kann.

8.5. Gegeben sei das folgende konvexe Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} & \min x_1^2 - 6x_1 + x_2^3 - 3x_2 \\ \text{unter den Nebenbedingungen} \quad & x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

(i) Ermitteln Sie die Kuhn-Tucker Bedingungen für das Problem.

(ii) Verwenden Sie die Kuhn-Tucker Bedingungen, um zu überprüfen, ob $(x_1, x_2) = (0.5, 0.5)$ eine optimale Lösung ist.

(iii) Benützen Sie die Kuhn-Tucker Bedingungen zur Bestimmung einer optimalen Lösung.

8.6. Zur Bereitstellung von Energie stehen zwei Energieträger nämlich Heizöl und Steinkohle zur Verfügung. Die Kosten, Energieinhalt und Inhalt eines Schadstoffes sind in folgender Tabelle gegeben:

	Heizöl	Steinkohle
Energie	42 MJ/kg	28 MJ/kg
Schadstoff	2 g /kg	10 g /kg
Kosten	75 cent/kg	25 cent/kg

Wie sind diese Energieträger einzusetzen, wenn mindestens 200000 MJ Energie bereitgestellt werden, sollen, maximal 3000 Euro ausgegeben werden dürfen, und die Schadstoffbelastung je Energieeinheit minimiert werden soll.

9 Optimierung unter Mehrfachzielsetzung

9.1. Betrachten Sie das folgende lineare Optimierungsproblem mit zwei Zielfunktionen

$$\begin{array}{rrl} \max & & 2x_1 + 3x_2 \\ \max & & 3x_1 + \alpha x_2 \\ \text{Nebenbedingungen} & x_1 + x_2 & \leq 7 \\ & x_1 & \leq 5 \\ & x_2 & \leq 4 \\ & x_i & \geq 0 \end{array}$$

(i) Für welche Werte des Parameters α gibt es eine perfekte Lösung, i.e. liegt kein Zielkonflikt vor?

(ii) Bestimmen Sie die vollständige Lösung für $\alpha = 2$.

(iii) Von welchen Lösungen wird die Lösung $\vec{x} = (2, 3)^t$ (für $\alpha = 2$) dominiert?

9.2. Betrachten Sie die beiden Funktionen $f_1(x) = \sqrt{(x-2)^2 + 4} + 2$ sowie $f_2(x) = 0.5(x - 3)^2 + 3$, wobei Sie beide Funktionen minimieren wollen.

(i) Bestimmen Sie die vollständige Lösung, (i.e. die Menge der parto-optimalen Lösungen).

(ii) Bestimmen Sie eine Lösung nach dem "Mini-Max- Prinzip".

(iii) Bestimmen Sie mittels Goal-Programming die optimale Lösung, wobei Sie als Zielfunktional

$$\left[(f_1(x) - f_1^*)^2 + (f_2(x) - f_2^*)^2\right]^{0.5}$$

heranziehen. f_i^* bezeichnet dabei den optimalen Funktionswert, wenn die jeweilige Funktion für sich allein minimiert wird.

9.3. Eine Unternehmung fertigt zwei Produkte I und II zu x Mengeneinheiten bzw. zu y Mengeneinheiten. Produkt I erzielt einen Deckungsbeitrag von 5.- Euro je Einheit, Produkt II einen Deckungsbeitrag von 10.- Euro je Einheit.

Maximal absetzbar sind in der betrachteten Periode 100 Einheiten von I und 80 Einheiten von II. Für beide Produkte werden Vorprodukte 1 und 2 benötigt, die in der Unternehmung selbst hergestellt werden und in beschränktem Maß zur Verfügung stehen. Vom Vorprodukt 1 (2) können höchstens 740 (980) Einheiten gefertigt werden. Produkt I benötigt für eine Einheit 5 (9) Einheiten des Vorproduktes 1 (2), Produkt II benötigt von beiden Vorprodukten je 8 Einheiten.

Da die Unternehmung langfristig die besseren Gewinnchancen beim Produkt I sieht, verfolgt sie neben dem Ziel der Deckungsbeitragsmaximierung das Ziel, einen möglichst großen Marktanteil des Produktes I zu erzielen. Dabei schätzt sie einen Deckungsbeitrag von 4.- Euro ebenso hoch wie den Absatz einer Einheit des Produktes I.

Wie lautet der optimale Produktionsplan?

9.4. Eine Unternehmung stellt zwei Produkte I und II her, und zwar x Einheiten von Produkt I und y Einheiten von Produkt II. Beide Produkte werden auf einer Maschine gefertigt, die im Monat 200 Stunden zur Verfügung steht, wovon 40 Stunden für Wartung u.ä.

benötigt werden. Die Fertigungszeit für eine Einheit von Produkt I beträgt 1 Stunde, die für Produkt II beträgt 2 Stunden. Insgesamt fallen an variablen Kosten je Stück 4.- Euro für Produkt I und 44.- Euro für Produkt II an. Als Absatzpreis haben sich 11.- Euro für I und 49.- Euro für II ergeben. Beide Produkte unterliegen Absatzbeschränkungen: 100 Einheiten von Produkt I und 40 Einheiten von Produkt II sind pro Monat maximal absetzbar.

Neben dem Ziel der Deckungsbeitragsmaximierung verfolgt die Unternmehmung das Ziel Umsatzmaximierung. Da beide Ziele unvereinbar sind, beschließt die Unternehmung, die Aktion zu verwirklichen, bei der die relative maximale Abweichung von beiden Optima minimal wird.

Wie lautet der optimale Produktionsplan?

9.5. Eine Unternehmung fertigt auf einer Anlage 2 Produkte, die beide ein in der Unternehmung selbst hergestelltes Vorprodukt benötigen.

	Produkt I	Produkt II
gefertigte Menge	x	y
Fertigungszeit/Einheit	1Stunde	2 Stunden
Materialbedarf/Einheit	3 Einheiten	1 Einheit

Als Restriktion ergibt sich vom Absatzmarkt her, dass von beiden Produkten zusammen nicht mehr als 100 Einheiten pro Monat abgesetzt werden können. Es darf nicht auf Lager produziert werden.

Bei der Festsetzung des optimalen Produktionsprogramms sind für die Unternehmung folgende Ziele wichtig:

(a) Die Kapazität der Anlage soll möglichst mit 160 Std/Monat ausgelastet werden.

(b) Vom Vorprodukt sollen je Monat 240 Einheiten verbraucht werden.

Wie lautet der optimale Produktionsplan,

(a) wenn Abweichungen von den Zielvorgaben als gleichwertig erachtet werden?

(b) wenn Abweichungen von der ersten Zielvorgabe mit dem dreifachen Gewicht entsprechender Abweichungen von der zweiten Zielvorgabe bewertet werden (da eventuell ungenutzte Materialien anderweitig verarbeitet werden können)?

9.6. Der Entenhausener Großbankier Dagobert Duck möchte jedem seiner Großneffen Tick, Trick und Track eine Weihnachtsgratifikation für ihre erfolgreiche Überwachung des Geldspeichers überreichen. Die Höhe einer Gratifikation richtet sich dabei nach dem jeweiligen Einsatz des Großneffen. Nach längerem Nachdenken stellt Dagobert Duck fest, dass Trick dreimal soviel wie Tick, Track zweimal soviel wie Tick und Trick dreimal soviel wie Track geleistet hat.

Als kompetenter "Mehrzielanalytiker" entschließt sich Herr Duck, sein Aufteilungsproblem mit der Eigenwertmethode des AHP zu lösen. Da er seine Ergebnisse überprüfen möchte, bittet er Sie, das Problem ebenfalls zu lösen. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(a) Stellen Sie die Matrix der paarweisen Vergleiche auf.

(b) Berechnen Sie den größten Eigenwert mit zugehörigem Eigenvektor.

(c) Ist Herr Duck in seinen Vergleichsurteilen konsistent? Begründen Sie Ihre Antwort (2 Möglichkeiten).

(d) Wieviel Geld erhält jeder Großneffe, falls Herr Duck insgesamt 1000 Taler verteilen möchte?

9.7. Sie möchten eine Sekretärin einstellen. Dabei sind Ihnen drei Kriterien wichtig: Persönlichkeit (X_1), Schreibmaschinen-/Computerkenntnisse (X_2), Intelligenz (X_3). Sie haben folgende Paarvergleichsmatrix aufgestellt:

$$\begin{array}{c} \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} X_1 & X_2 & X_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ 4 & 1 & \frac{1}{2} \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ihre Bewertung der beiden Bewerberinnen bezüglich Ihrer drei Kriterien lautet folgendermaßen:

$$\begin{array}{c} \\ \text{Bewerberin 1} \\ \text{Bewerberin 2} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} X_1 & X_2 & X_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 & 0.8 \end{pmatrix} \end{array}$$

Welche Bewerberin sollten Sie auf Grundlage des AHP einstellen?