Wasserreservoir-Management als Beispiel für stochastische, dynamische Optimierung

(entnommen aus: "Linear quadratic dynamic programming for water reservoir management", E.C. Özelkan et al., Applied Math. Modelling, vol.21)

Wasserreservoirs dienen zur

- Energieerzeugung
- Bewässerung
- Hochwasserschutz
- $\cdots$

Grundmodell

- diskrete Zeit mit endlichem Zeithorizont (indiziert durch $k = 0, 1, \cdots, K$)
- $S_k \cdots$ Zustandsraum (zum Zeitpunkt k), $k = 0, \cdots, K$,
- $x_k \cdots$ Zustand des Systems zum Zeitpunkt k, $x_k \in S_k$.
- $C_k \cdots$Entscheidungsraum (zum Zeitpunkt k)
- $u_k \cdots$ Kontrolle (Entscheidungsvariable)
- $w_k \cdots$Störgröße, Zufallsvariable, w_k kann von x_k und u_k abhängen, nicht jedoch von $w_{k-1}, \cdots, w_0$

Die Systemdynamik (i.e. Änderung des Zustandes mit der Zeit) wird durch folgende Gleichung beschrieben

$$x_{k+1} = f_k[x_k, u_k, w_k], \quad k = 0, \cdots, K-1$$

Die Menge der **zulässigen** Politiken besteht aus Folgen von Funktionen $\pi = (\mu_0, \mu_1, \cdots, \mu_{K-1})$, wobei $\mu_k : S_k \to C_k$ eine Entscheidungsfunktion ist, die jedem Zustand x_k eine Kontrolle $u_k = \mu_k(x_k) \in C_k(x_k)$ zuordnet.

Problemstellung:

Finde (bei gegebenen Anfangszustand x_0) eine zulässige Politik π , sodass das Kostenfunktional

$$J_\pi(x_0) = \mathbb{E}\left\{ g_k(x_k) + \sum_{k=0}^{K-1} g_k(x_k, \mu_k(x_k) w_k) | x_0 \right\}$$

minimiert wird.

LQ-Modell:

lineare Systemdynamik:

$$\vec{x}_{k+1} = A_k\vec{x}_k + B_k\vec{u}_k + \vec{w}_k$$

$S_k \subset \mathbb{R}^n, \quad C_k \subset \mathbb{R}^m, \quad A_k \cdots n \times n - \text{Matrix}, \quad B_k \cdots n \times m - \text{Matrix}$

quadratische Kosten

$$\mathbb{E}\left\{\vec{x}_K' Q_K \vec{x}_K + \sum_{k=0}^{K-1}(\vec{x}_k' Q_k \vec{x}_k + \vec{u}_k' R_k \vec{u}_k)|\vec{x}_0\right\}$$

Weiters werden folgende Annahmen getroffen:

$Q_k \cdots$ symmetrische, positiv semidefinite Matrizen

$R_k \cdots$ symmetrische, positiv definite Matrizen

$w_k \cdots$ haben Erwartungswert 0, endliche Varianz, Verteilungen sind unabhängig von $\vec{x}_k$ und $\vec{u}_k$

Erweiterungen des LQ-Modells:

"tracking problem"

Der Zustand des Systems soll möglichst einem vorgegebenen Zustandspfad $\underline{\vec{x}_k}$ folgen. Es soll also folgendes Kostenfunktional minimiert werden:

$$\mathbb{E}\left\{(\vec{x}_K - \underline{\vec{x}_K})' Q_K (\vec{x}_K - \underline{\vec{x}_K}) + \sum_{k=0}^{K-1}((\vec{x}_k - \underline{\vec{x}_k})' Q_k (\vec{x}_k - \underline{\vec{x}_k}) + \vec{u}_k' R_k \vec{u}_k)|\vec{x}_0\right\}$$

Anwenden der dynamischen Optimierung liefert folgende lineare optimale Feedback-Lösung:

$$\vec{\mu}_k^*(\vec{x}_k) = L_k(\vec{x}_k - \underline{\vec{x}_k}), \quad \forall k = 0, \cdots, K-1$$

wobei L_k durch

$$L_k = -(B_k' M_{k+1} B_k + R_k)^{-1} B_k' M_{k+1} A_k \tag{1}$$

und die (symmetrischen und positiv semi-definiten) Matrizen M_k rekursiv durch $M_K := Q_K$ und die Riccati-Gleichung

$$M_k := A_k' \left[M_{k+1} - M_{k+1}B_k(B_k' M_{k+1} B_k + R_k)^{-1} B_k' M_{k+1}\right] A_k + Q_k \tag{2}$$

gegeben sind.

Stationäre Lösung:

Falls die Matrizen A_k, B_k, Q_k,sowie R_k unabhängig von der Zeit k sind, dann strebt M_k gegen die Gleichgewichtslösung M, die die algebraische Riccati-Gleichung

$$M = A' \left[M - MB(B'MB + R)^{-1} B'M\right] A + Q$$

erfüllt.

Für einen entsprechend großen Zeithorizont kann daher die optimale Politik durch

$$\mu^*(\vec{x}) = L(\vec{x} - \underline{\vec{x}_k})$$

angenähert werden, wobei

$$L = -(B'MB + R)^{-1}B'MA$$

gilt.

"policy tracking"

Eine weitere Verallgemeinerung besteht darin, dass nun die Kontrolle $\vec{u}_k$ vorgegebenen Zielwerten $\underline{\vec{u}_k}$ folgen soll und weiters der Erwartungswert des Störterms von 0 verschieden ist, i.e. $\mathbb{E}w_k = \mu \neq 0$.

Bei Wasserreservoir Management Problemen entsprechen die vorgebenen Zielwerte der Kontrolle etwa einer idealen Wasserentnahme für Bewässerung, Schiff-fahrt bzw. Energieerzeugung.

Der Störterm beschreibt zufällige Zuflüsse, deren Erwartungswert positiv ist.

Als Zielfunktional ist nun

$$\mathbb{E}\left\{(\vec{x}_K - \underline{\vec{x}_K})'Q_K(\vec{x}_K - \underline{\vec{x}_K}) + \sum_{k=0}^{K-1}((\vec{x}_k - \underline{\vec{x}_k})'Q_k(\vec{x}_k - \underline{\vec{x}_k}) + (\vec{u}_k - \underline{\vec{u}_k})'R_k(\vec{u}_k - \underline{\vec{u}_k}))|\vec{x}_0\right\}$$

zu minimieren, unter der Dynamik

$$\vec{x}_{k+1} = A_k\vec{x}_k + B_k\vec{u}_k + \vec{w}_k$$

wobei nun $\mathbb{E}\vec{w}_k = \vec{\mu}$.

Unter den Voraussetzungen

$$A_k = I(= \text{ Einheitsmatrix}) \quad \text{ und } B_{k+1}\underline{u}_{k+1} = B_k\underline{u}_k$$

ist durch die Transformation

$$\begin{aligned}
\vec{y}_k &= \vec{x}_k - k(\vec{\mu} + B_k\underline{\vec{u}_k}) \\
\underline{\vec{y}_k} &= \underline{\vec{x}_k} - k(\vec{\mu} + B_k\underline{\vec{u}_k}) \\
\vec{v}_k &= \vec{u}_k - \underline{\vec{u}_k} \\
\vec{z}_k &= \vec{w}_k - \vec{\mu}
\end{aligned}$$

das obige Problem äquivalent zu

$$\min \mathbb{E}\left\{(\vec{y}_K - \underline{\vec{y}_K})' Q_K (\vec{y}_K - \underline{\vec{y}_K}) + \sum_{k=0}^{K-1} ((\vec{y}_k - \underline{\vec{y}_k})' Q_k (\vec{y}_k - \underline{\vec{y}_k}) + \vec{v}_k' R_k \vec{v}_k) | \vec{y}_0 \right\}$$

unter der Dynamik

$$\vec{y}_{k+1} = \vec{y}_k + B_k \vec{v}_k + \vec{z}_k$$

wobei die $\vec{z}_k$ identisch, unabhängig verteilt sind mit $\mathbb{E}\vec{z}_k = 0$. (siehe Übungsbeispiel)

Als optimale feedback Lösung erhält man also

$$\vec{v}_k = L_k(\vec{y}_k - \underline{\vec{y}_k}) = L_k(\vec{x}_k - \underline{\vec{x}_k})$$

bzw.

$$\vec{u}_k = \underline{\vec{u}_k} + L_k(\vec{x}_k - \underline{\vec{x}_k})$$

wobei L_k durch Gleichung (1) gegeben ist.

Anwendung auf Wasserreservoir Management

$$x_{k+1} = \max\{x_{min}, \min\{x_{max}, x_k + (f_k + y_k - e_k) - u_k\}\}$$

wobei

x_k	$\cdots$	Wasserstand des Reservoirs
x_{min}, x_{max}	$\cdots$	minimaler / maximaler Wasserstand
f_k	$\ldots$	Zuflüsse in das Reservoir, Zufallsvariable
y_k	$\cdots$	Niederschläge auf das Reservoir, Zufallsvariable
e_k	$\cdots$	Verdunstung, Zufallsvariable
$u_k \in [u_{min}, u_{max}]$	$\cdots$	Wasserentnahme, Kontrollvariable

Einerseits soll nun die entnommene Wassermenge u_k vorgegebenen Mengen $\underline{u_k}$ folgen (z.B. Bewässerung in der Landwirtschaft, Energieerzeugung, etc.), andererseits soll auch der Wasserstand im Reservoir von einem vorgegebenen Niveau $\underline{x_k}$ nicht allzuweit abweichen (z.B. Erholungs- und Freizeitaktivitäten).

Bei einem quadratischen Ansatz erhält man als zu minimierendes Zielfunktional

$$\min_{u_k} \mathbb{E}\left\{\sum_{k=0}^{K-1} \alpha(x_k - \underline{x_k})^2 + \beta(u_k - \underline{u_k})^2 | x_k\right\}$$

Um obiges Lösungsverfahren auf dieses Wasserreservoir-Problem anwenden zu können, sind folgende Annahmen zu treffen:

1. Die zufälligen Wasserzuflüsse, Regen und Verdunstung werden mittels

$$w_k = f_k + y_k - e_k$$

zu einem zufälligen Störterm w_k zusammengefasst. Es wird angenommen, dass die w_k unabhängig und identisch verteilt sind (i.i.d.) mit Mittelwert $\mathbb{E}w_k = \mu$ und Varianz $\mathrm{Var}\,(w_k) = \sigma^2$.

(Diese Annahme ist bei hydro/climatischen Systemen i.A. nicht erfüllt. Allerdings haben Sommer-Gewitter im SW der USA eher ein "kurzes" Gedächtnis.)

2. Wir betrachten das Problem als unrestringiertes Problem, i.e. die Systemdynamik ist durch

$$x_{k+1} = x_k - u_k + w_k$$

gegeben. Dies ist bei großen Wasserreservoirs, bei denen die Grenzwerte x_{max} bzw. x_{min} ohnehin nicht über/unterschritten werden zulässig.

Es kann nun nach der oben angegebenen Methode die optimale Feedback-Lösung berechnet werden.

Für Wasserreservoirprobleme ist es sinnvoll anzunehmen, dass innerhalb einer Periode die Zielwerte und die Parameter des Zielfunktionals konstant sind, i.e.

$$\alpha_k = \alpha, \quad \beta_k = \beta, \quad \underline{\vec{x}_k} = \underline{\vec{x}}, \quad \underline{\vec{u}_k} = \underline{\vec{u}}.$$

Unter diesen Annahmen erhält man als stationäre Lösung (siehe Übungsbeispiel)

$$u_k = \underline{u} + L(x_k - \underline{x})$$

mit

$$L = \frac{M}{M+\beta} \text{ sowie } M = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\alpha\beta}}{2}$$

Fallstudie: Tenkiller Ferry Lake

Anhand des Tenkiller Ferry Lake am Illinois River in Oklahoma wird die prinzipielle Anwendbarkeit dieser Methode gezeigt.

Daten: tägliche Werte des Wasserstandes, der Entnahmemenge, sowie der Zuflüsse bzw. Verdunstung über 11 Jahre.

Bei der Analyse wurden die Daten jeweils für einen Monat betrachtet.

Als Zielwerte $\underline{\vec{x}}$ bzw. $\underline{\vec{u}}$ und als Erwartungswert der Störgröße $\mu = \mathbb{E}(w)$ wurden jeweils die Monatsmittel herangezogen. (siehe Tabelle)

Monat	$\underline{u}(10^6m^3)$	$\underline{x}(10^6m^3)$	$u_{max}(10^6m^3)$	$\mu(10^6m^3)$
Jänner	1.07	346.92	6.32	1.57
Februar	0.84	346.71	4.26	1.99
März	1.15	360.63	5.51	2.94
April	1.54	363.76	6.27	2.77
Mai	0.76	351.49	2.66	1.79
Juni	0.88	365.56	3.83	1.71
Juli	0.46	350.37	2.51	0.29
August	0.37	338.46	1.59	0.31
September	0.26	326.53	1.57	0.45
Oktober	0.20	326.48	2.02	0.73
November	0.66	343.34	3.83	1.75
Dezember	1.07	358.95	6.23	2.70

Die Autoren haben in einer deskriptiven Analyse ein LQ-Modell an die historischen Daten angepasst. Aus

$$u_k - \underline{u} = L(x_k - \underline{x}_k)$$

erhält man mittels OLS-Schätzer

$$\hat{L} = (X'X)^{-1}X'U$$

wobei

$$X = \begin{pmatrix} x_1 - \underline{x} \\ \vdots \\ x_K - \underline{x} \end{pmatrix} \quad \text{und } U = \begin{pmatrix} u_1 - \underline{u} \\ \vdots \\ u_K - \underline{u} \end{pmatrix}$$

Für das Verhältnis der Parameter erhält man durch Umformen:

$$\widehat{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \left(\frac{\hat{L}^2}{1 - \hat{L}}\right)$$

Mehrstufige stochastische Probleme

1. **stochastische Entscheidungsbäume**

   Verzweigungen treten für jedes x_t bzw. $\tilde{\zeta}_t$ auf

   - Zustand z_t kann stetig oder diskret sein
   - Entscheidungen x_t sind diskret
   - Zufallsvariable $\tilde{\zeta}_t$ sind diskret

2. **stochastische dynamische Optimierung**

   Entscheidung für jeden möglichen Zustand z_t

   - endliche Anzahl von Zuständen vorteilhaft, aber auch stetiger Zustandsraum möglich
   - Entscheidungen x_t sind stetig oder diskret
   - Zufallsvariable $\tilde{\zeta}_t$ sind stetig oder diskret

3. **Ereignisbäume** Verzweigung bei jeder Realisierung der Zufallsvariablen $\tilde{\zeta}_t$

   - Zufallsvariable $\tilde{\zeta}_t$ sind diskret
   - Zustand z_t kann stetig oder diskret sein
   - Entscheidungen x_t sind stetig

Szenarienaggregation

Betrachten ein Problem über T Zeitperioden $t = 0, 1, \cdots, T$ wobei in jeder Stufe die Systemdynamik von der Zufallsvariablen $\tilde{\zeta}_t$ abhängt.

Def: Unter einem **Szenario** versteht man eine Abfolge von Realisierungen der Zufallsvariablen $\tilde{\zeta}_t, t = 0, \cdots T$.

$$s = (\zeta_0^s, \zeta_1^s, \cdots, \zeta_T^s) \quad \cdots \text{Szenario } s$$

Sei $\mathcal{S}$ die Menge aller möglicher Szenarien.

Möglichkeit 1:

L öse für jedes Szenario $s \in \mathcal{S}$:

$$\min \sum_{t=0}^{T} \alpha^t r_t(z_t, x_t, \zeta_t^s) + \alpha^{T+1} Q(z_{T+1})$$

$$\text{s.t. } z_{t+1} = G_t(z_t, x_t, \zeta_t^s), \quad A_t(z_t) \leq x_t \leq B_t(z_t) \quad t = 0, \cdots, T$$

wobei z_0 gegeben sei.

Für jedes Szenario bekommt man eine Lösung $x^s = (x_0^s, x_1^s, \cdots, x_T^s)$.

Ist es sinnvoll nun als Lösung

$$\underline{\mathrm{x}}_t = \sum_{s \in \mathcal{S}} p^s x_t^s$$

heranzuziehen, wobei p^s die Wahrscheinlichkeit von Szenario s angibt?

NEIN!!

- $\underline{\mathrm{x}}_t$ ist möglicherweise nicht zulässig

- Selbst wenn $\underline{\mathrm{x}}_t$ zulässig ist ist es wohl kaum optimal

Auf folgende Weise kann eine implementierbare Lösung bestimmt werden:

Sei für jede Periode t die Menge $\{s\}_t$ gegeben durch alle Szenarien s die bis zum Zeitpunkt t übereinstimmen, i.e.

$$\{s\}_t = \{s | \zeta_0^s, \cdots, \zeta_t^s \text{ stimmen überein}\}.$$

Sind nun für die einzelnen Szenarien die optimalen L ösungen bekannt, kann durch Mittelung eine zulässige Lösung berechnet werden

$$\underline{\mathrm{x}}(\{s\}_t) = \sum_{s' \in \{s\}_t} \frac{p^{s\prime} x_t^{s\prime}}{p(\{s\}_t)}$$

Diese Lösung ist zulässig, aber i.A. nicht optimal.

Bestimmung der optimalen Lösung:

$$\min \sum_{s \in \mathcal{S}} p^s \left(\sum_{t=0}^{T} \alpha^t r_t(z_t^s, x_t^s, \zeta_t^s) + \alpha^{T+1} Q(z_{T+1}^s) \right)$$

$$\text{s.t. } z_{t+1}^s = G_t(z_t^s, x_t^s, \zeta_t^s), \quad A_t(z_t^s) \leq x_t^s \leq B_t(z_t^s) \quad t = 0, \cdots, T$$

und der Implementierbarkeitsbedingung

$$x_t^s = \sum_{s' \in \{s\}_t} \frac{p^{s\prime} x_t^{s\prime}}{p(\{s\}_t)} \qquad \text{für alle } t = 0, \cdots, T, \text{ und alle Szenarien } s$$

Lagrange-Methode:

$$\min \sum_{s\in\mathcal{S}} p^s \left(\sum_{t=0}^{T} \alpha^t \left[r_t(z_t^s, x_t^s, \zeta_t^s) + w_t^s \left(x_t^s - \sum_{s'\in\{s\}_t} \frac{p^{s'} x_t^{s'}}{p(\{s\}_t)} \right) \right] + \alpha^{T+1} Q(z_{T+1}) \right)$$

Ersetze

$$\sum_{s'\in\{s\}_t} \frac{p^{s'} x_t^{s'}}{p(\{s\}_t)}$$

durch das Mittel der vorhergegangenen Iteration

$$\underline{\mathrm{x}}(\{s\}_t) = \sum_{s'\in\{s\}_t} \frac{p^{s'} x_t^{s'}}{p(\{s\}_t)}$$

Man erhält also

$$\min \sum_{s\in\mathcal{S}} p^s \left(\sum_{t=0}^{T} \alpha^t \left[r_t(z_t^s, x_t^s, \zeta_t^s) + + w_t^s \left(x_t^s - \underline{\mathrm{x}}(\{s\}_t) \right) \right] + \alpha^{T+1} Q(z_{T+1}) \right)$$

augmented Lagrangian method

$$\min \sum_{s\in\mathcal{S}} p^s \left(\sum_{t=0}^{T} \alpha^t \left[r_t(z_t^s, x_t^s, \zeta_t^s) + + w_t^s x_t^s + \frac{\rho}{2} [x_t^s - \underline{\mathrm{x}}(\{s\}_t)]^2 \right] + \alpha^{T+1} Q(z_{T+1}^s) \right)$$

Algorithmus:

1. setze $w_t^s := 0 \qquad \forall s, t$
2. bestimme anfngliches $\underline{\mathrm{x}}(\{s\}_t)$
3. setze $\rho > 0$
4. Löse für alle Szenarien

$$\begin{aligned} &\min \sum_{t=0}^{T} \alpha^t r_t(z_t, x_t, \zeta_t^s) + w_t^s + \frac{\rho}{2}(x_t - \underline{\mathrm{x}}(\{s\}_t))^2 + \alpha^{T+1} Q(z_{T+1}) \\ &\text{s.t. } z_{t+1} = G_t(z_t, x_t, \zeta_t^s), \quad A_t(z_t) \le x_t \le B_t(z_t) \quad t = 0, \cdots, T \end{aligned}$$

   und erhalte damit x^s, z^s

5. berechne

$$\underline{\mathrm{x}}(\{s\}_t) = \sum_{s'\in\{s\}_t} \frac{p^{s'} x_t^{s'}}{p(\{s\}_t)}$$

6. aktualisiere ρ falls nötig
7. berechne

$$w_t^s := w_t^s + \rho(x_t - \underline{\mathrm{x}}(\{s\}_t))$$

8. Wiederhole Schritte 4 - 7 bis Ergebnis hinreichend gut.

Szenarienaggregation

Anwendungsbeispiel

An einem Fluss liegen zwei Wasserreservoirs A und B, die zur Stromerzeugung dienen.

Variable:

- $z_{ij} \cdots$ Wassermenge in Reservoir $i, (i \in \{A, B\})$ zu Beginn von Periode $j, (j \in \{1, 2, \cdots, T\})$. (Zustand)
- $x_{ij} \cdots$ Wassermenge, die während Periode j zur Stromerzeugung aus Reservoir i entnommen wird. (Entscheidungsvariable)
- $r_{ij} \cdots$ Wassermenge, die während Periode j aus Reservoir i abgelassen wird, jedoch nicht zu Stromerzeugung verwendet wird. (Entscheidungsvariable)
- $g_{ij} \cdots$Zufluss in Reservoir i während Periode j. (Zufallsvariable)

Unter der Annahme, dass aus Reservoir A abgelassenes Wasser in derselben Periode Reservoir B erreicht, ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} z_{Aj+1} &= z_{Aj} + g_{Aj} - x_{Aj} - r_{Aj} \\ z_{Bj+1} &= z_{Bj} + g_{Bj} + x_{Aj} + r_{Aj} - x_{Bj} - r_{Bj} \end{aligned}$$

Weiters gibt es folgende Restriktionen: $x_{ij} \in [\underline{x}_i, \bar{x}_i]$ und $z_{ij} \in [\underline{z}_i, \bar{z}_i]$.

Ziel ist es, den Ertrag aus der Stromproduktion zu maximieren

$$\sum_{i=1}^{T} p_j(u_{Aj} + u_{Bj}) + Q_{T+1}(z_{AT+1}, z_{BT+1})$$

Energiemanagementsysteme für hydro-thermische Kraftwerksyteme

Eigenschaften:

- hochdimensional
- mehrstufig
- stochastisch: z.B. Strompreise, Last, Wasserzuflüsse, etc. modelliert durch Szenarienbäume
- gemischt-ganzzahlig
- dienen zur simultanen Planung von Stromerzeugung und Stromhandel

Generierung/Reduktion von Szenarienbäumen

Zerlege Optimierungszeitraum in T Zeitintervalle.

$\Rightarrow$ statistischen, multivariaten Datenprozess $\tilde{\zeta} = \{\tilde{\zeta}_z\}_{t=1}^T, \quad \zeta_t \in \mathbb{R}^m$. Die Komponenten von ζ_t beschreiben etwa Lat, Reserveleistung, Wasserzuflüsse, Preise, etc.

Approximiere $\tilde{\zeta}$ durch endliche Anzahl von Realisierungen (Szenarien) $\zeta^s = \{\zeta_t^s\}_{t=1}^T$mit zugehörigen Wahrscheinlichkeiten π^s.

methodischer Ansatz zur Generierung von Szenarienbäumen:

(1) Erzeugung von Szenarien des Datenprozesses $\tilde{\zeta}$

(2) Konstruktion von Szenarienbäumen aus Datenprozess

(3) Reduktion der Szenarienbäume

ad (1)&(2) Approximation von ζ durch endlich viele Pfade $\{\zeta^s\}_{s=1}^S$ mit Wahrscheinlichkeiten $\{\pi^s\}_{s=1}^S$ mit gleichem (deterministischen) Anfangszustand durch

- historische Daten
- Expertenszenarien
- Simulation statistischer Modelle

ad (3) Reduktion der Szenarienbäume (siehe etwa W. Römisch, Berlin)

- möglichst viele Szenarien entfernen
- Approximationsgenauigkeit des neuen Szenarienbaums soll sich höchstens um vorgegebene Toleranz verschlechtern

Dekomposition des Energiemanagementmodells in Teilprobleme

1. Stromhandel an Strombörse
2. Teilproblem der optimalen Stromerzeugung mittels thermischer Einheiten
3. Teilproblem des optimalen Einsatzes von Pumpspeicheranlagen

(1) und (2) werden etwa durch stochastische dynamische Optimierung gelöst, Problem (3) hat eine Netzwerkfluss-Struktur. (3) kann als lineares Minimum-Cost-Flow Problem (gegebenenfalls mit stochastischen Erweiterungen) formuliert und gelöst werden.

Bedeutung von Pump-Speicherkraftwerken:

- Energiereserve für auftretende Lastspitzen
- flexible Optimierung der Stromerzeugung in Zeiträumen hoher bzw. niedriger Strompreise

Strom billig	$\Rightarrow$	kaufe Energie oder erzeuge Strom im therm. KW	$\Rightarrow$	pumpe Wasser ins Oberbecken
Strom teuer	$\Rightarrow$	erzeuge Strom durch Pumpspeicherkraftwerk	$\Rightarrow$	verkaufe zu hohem Preis

- Entkoppelung von Zufluss und Erzeugung (im Gegensatz zu Laufkraftwerken)

Diskretisiere Zeitraum in Stunden/Tages/Wochenintervalle.

Bestimme in jedem Zeitpunkt Pump- bzw- Turbinenleistung

T	$\cdots$	Anzahl der Zeitperioden
w^t/v^t	$\cdots$	Pump-/ Turbinenleistung
l^t	$\cdots$	Füllstand des Oberbeckens
s^t	$\cdots$	Zufluss in das Oberbecken
λ^t	$\cdots$	Kostenkoeffizient
η	$\cdots$	Wirkungsgrad
l^{in}/l^{end}	$\cdots$	Anfangs-/ Endfüllstand

$\Rightarrow$ lineares Optimierungsproblem

$$\begin{array}{rcl}
\min & \sum_{t=1}^{T} & \lambda^t(w^t - v^t) \\
l^t & = & l^{t-1} + \eta w^t - v^t + s^t \\
w^{min} & \leq & w^t \leq w^{max} \\
v^{min} & \leq & v^t \leq v^{max} \\
l^{min} & \leq & l^t \leq l^{max} \\
l^0 & = & l^{in} \\
l^T & = & l^{end}
\end{array}$$

Zusammenfügen der Zeitperioden $\Rightarrow$ Netzwerkflussproblem.