Wasserreservoir-Management als Beispiel für stochastische, dynamische Optimierung

(entnommen aus: "Linear quadratic dynamic programming for water reservoir management", E.C. Özelkan et al., Applied Math. Modelling, vol.21)

Wasserreservoirs dienen zur

- Energieerzeugung
- Bewässerung
- Hochwasserschutz
- $\cdots$

Grundmodell

- diskrete Zeit mit endlichem Zeithorizont (indiziert durch $k = 0, 1, \cdots, K$)
- $S_k \cdots$ Zustandsraum (zum Zeitpunkt k), $k = 0, \cdots, K$,
- $x_k \cdots$ Zustand des Systems zum Zeitpunkt k, $x_k \in S_k$.
- $C_k \cdots$Entscheidungsraum (zum Zeitpunkt k)
- $u_k \cdots$ Kontrolle (Entscheidungsvariable)
- $w_k \cdots$Störgröße, Zufallsvariable, w_k kann von x_k und u_k abhängen, nicht jedoch von $w_{k-1}, \cdots, w_0$

Die Systemdynamik (i.e. Änderung des Zustandes mit der Zeit) wird durch folgende Gleichung beschrieben

$$x_{k+1} = f_k[x_k, u_k, w_k], \quad k = 0, \cdots, K-1$$

Die Menge der **zulässigen** Politiken besteht aus Folgen von Funktionen $\pi = (\mu_0, \mu_1, \cdots, \mu_{K-1})$, wobei $\mu_k : S_k \to C_k$ eine Entscheidungsfunktion ist, die jedem Zustand x_k eine Kontrolle $u_k = \mu_k(x_k) \in C_k(x_k)$ zuordnet.

Problemstellung:

Finde (bei gegebenen Anfangszustand x_0) eine zulässige Politik π , sodass das Kostenfunktional

$$J_\pi(x_0) = \mathbb{E}\left\{g_k(x_k) + \sum_{k=0}^{K-1} g_k(x_k, \mu_k(x_k)w_k)|x_0\right\}$$

minimiert wird.

LQ-Modell:

lineare Systemdynamik:

$$\vec{x}_{k+1} = A_k\vec{x}_k + B_k\vec{u}_k + \vec{w}_k$$

$S_k \subset \mathbb{R}^n, \quad C_k \subset \mathbb{R}^m, \quad A_k \cdots n \times n - \text{Matrix}, \quad B_k \cdots n \times m - \text{Matrix}$

quadratische Kosten

$$\mathbb{E}\left\{\vec{x}'_K Q_K \vec{x}_K + \sum_{k=0}^{K-1} (\vec{x}'_k Q_k \vec{x}_k + \vec{u}'_k R_k \vec{u}_k) | \vec{x}_0\right\}$$

Weiters werden folgende Annahmen getroffen:

$Q_k \cdots$ symmetrische, positiv semidefinite Matrizen

$R_k \cdots$ symmetrische, positiv definite Matrizen

$w_k \cdots$ haben Erwartungswert 0, endliche Varianz, Verteilungen sind unabhängig von $\vec{x}_k$ und $\vec{u}_k$

Erweiterungen des LQ-Modells:

"tracking problem"

Der Zustand des Systems soll möglichst einem vorgegebenen Zustandspfad $\underline{\vec{x}_k}$ folgen. Es soll also folgendes Kostenfunktional minimiert werden:

$$\mathbb{E}\left\{(\vec{x}_K - \underline{\vec{x}_K})' Q_K (\vec{x}_K - \underline{\vec{x}_K}) + \sum_{k=0}^{K-1} ((\vec{x}_k - \underline{\vec{x}_k})' Q_k (\vec{x}_k - \underline{\vec{x}_k}) + \vec{u}'_k R_k \vec{u}_k) | \vec{x}_0\right\}$$

Anwenden der dynamischen Optimierung liefert folgende lineare optimale Feedback-Lösung:

$$\vec{\mu}^*_k(\vec{x}_k) = L_k(\vec{x}_k - \underline{\vec{x}_k}), \quad \forall k = 0, \cdots, K-1$$

wobei L_k durch

$$L_k = -(B'_k M_{k+1} B_k + R_k)^{-1} B'_k M_{k+1} A_k \tag{1}$$

und die (symmetrischen und positiv semi-definiten) Matrizen M_k rekursiv durch $M_K := Q_K$ und die Riccati-Gleichung

$$M_k := A'_k \left[M_{k+1} - M_{k+1} B_k (B'_k M_{k+1} B_k + R_k)^{-1} B'_k M_{k+1}\right] A_k + Q_k \tag{2}$$

gegeben sind.

Stationäre Lösung:

Falls die Matrizen A_k, B_k, Q_k,sowie R_k unabhängig von der Zeit k sind, dann strebt M_k gegen die Gleichgewichtslösung M, die die algebraische Riccati-Gleichung

$$M = A' \left[M - MB(B'MB + R)^{-1} B'M\right] A + Q$$

erfüllt.

Für einen entsprechend großen Zeithorizont kann daher die optimale Politik durch

$$\mu^*(\vec{x}) = L(\vec{x} - \underline{\vec{x}_k})$$

angenähert werden, wobei

$$L = -(B'MB + R)^{-1}B'MA$$

gilt.

"policy tracking"

Eine weitere Verallgemeinerung besteht darin, dass nun die Kontrolle $\vec{u}_k$ vorgegebenen Zielwerten $\underline{\vec{u}_k}$ folgen soll und weiters der Erwartungswert des Störterms von 0 verschieden ist, i.e. $\mathbb{E}w_k = \mu \neq 0$.

Bei Wasserreservoir Management Problemen entsprechen die vorgebenen Zielwerte der Kontrolle etwa einer idealen Wasserentnahme für Bewässerung, Schiff-fahrt bzw. Energieerzeugung.

Der Störterm beschreibt zufällige Zuflüsse, deren Erwartungswert positiv ist.

Als Zielfunktional ist nun

$$\mathbb{E}\left\{(\vec{x}_K - \underline{\vec{x}_K})'Q_K(\vec{x}_K - \underline{\vec{x}_K}) + \sum_{k=0}^{K-1}((\vec{x}_k - \underline{\vec{x}_k})'Q_k(\vec{x}_k - \underline{\vec{x}_k}) + (\vec{u}_k - \underline{\vec{u}_k})'R_k(\vec{u}_k - \underline{\vec{u}_k}))|\vec{x}_0\right\}$$

zu minimieren, unter der Dynamik

$$\vec{x}_{k+1} = A_k\vec{x}_k + B_k\vec{u}_k + \vec{w}_k$$

wobei nun $\mathbb{E}\vec{w}_k = \vec{\mu}$.

Unter den Voraussetzungen

$$A_k = I(= \text{ Einheitsmatrix}) \quad \text{ und } B_{k+1}\underline{u}_{k+1} = B_k\underline{u}_k$$

ist durch die Transformation

$$\begin{aligned}
\vec{y}_k &= \vec{x}_k - k(\vec{\mu} + B_k\underline{\vec{u}_k}) \\
\underline{\vec{y}_k} &= \underline{\vec{x}_k} - k(\vec{\mu} + B_k\underline{\vec{u}_k}) \\
\vec{v}_k &= \vec{u}_k - \underline{\vec{u}_k} \\
\vec{z}_k &= \vec{w}_k - \vec{\mu}
\end{aligned}$$

das obige Problem äquivalent zu

$$\min \mathbb{E}\left\{(\vec{y}_K - \underline{\vec{y}_K})' Q_K (\vec{y}_K - \underline{\vec{y}_K}) + \sum_{k=0}^{K-1} ((\vec{y}_k - \underline{\vec{y}_k})' Q_k (\vec{y}_k - \underline{\vec{y}_k}) + \vec{v}_k' R_k \vec{v}_k) | \vec{y}_0 \right\}$$

unter der Dynamik

$$\vec{y}_{k+1} = \vec{y}_k + B_k \vec{v}_k + \vec{z}_k$$

wobei die $\vec{z}_k$ identisch, unabhängig verteilt sind mit $\mathbb{E}\vec{z}_k = 0$. (siehe Übungsbeispiel)

Als optimale feedback Lösung erhält man also

$$\vec{v}_k = L_k(\vec{y}_k - \underline{\vec{y}_k}) = L_k(\vec{x}_k - \underline{\vec{x}_k})$$

bzw.

$$\vec{u}_k = \underline{\vec{u}_k} + L_k(\vec{x}_k - \underline{\vec{x}_k})$$

wobei L_k durch Gleichung (1) gegeben ist.

Anwendung auf Wasserreservoir Management

$$x_{k+1} = \max\{x_{min}, \min\{x_{max}, x_k + (f_k + y_k - e_k) - u_k\}\}$$

wobei

x_k	$\cdots$	Wasserstand des Reservoirs
x_{min}, x_{max}	$\cdots$	minimaler / maximaler Wasserstand
f_k	$\ldots$	Zuflüsse in das Reservoir, Zufallsvariable
y_k	$\cdots$	Niederschläge auf das Reservoir, Zufallsvariable
e_k	$\cdots$	Verdunstung, Zufallsvariable
$u_k \in [u_{min}, u_{max}]$	$\cdots$	Wasserentnahme, Kontrollvariable

Einerseits soll nun die entnommene Wassermenge u_k vorgegebenen Mengen $\underline{u}_k$ folgen (z.B. Bewässerung in der Landwirtschaft, Energieerzeugung, etc.), andererseits soll auch der Wasserstand im Reservoir von einem vorgegebenen Niveau $\underline{x}_k$ nicht allzuweit abweichen (z.B. Erholungs- und Freizeitaktivitäten).

Bei einem quadratischen Ansatz erhält man als zu minimierendes Zielfunktional

$$\min_{u_k} \mathbb{E}\left\{\sum_{k=0}^{K-1} \alpha(x_k - \underline{x}_k)^2 + \beta(u_k - \underline{u}_k)^2 | x_k\right\}$$

Um obiges Lösungsverfahren auf dieses Wasserreservoir-Problem anwenden zu können, sind folgende Annahmen zu treffen:

1. Die zufälligen Wasserzuflüsse, Regen und Verdunstung werden mittels

$$w_k = f_k + y_k - e_k$$

zu einem zufälligen Störterm w_k zusammengefasst. Es wird angenommen, dass die w_k unabhängig und identisch verteilt sind (i.i.d.) mit Mittelwert $\mathbb{E}w_k = \mu$ und Varianz $\mathrm{Var}\,(w_k) = \sigma^2$.

(Diese Annahme ist bei hydro/climatisvchen Systemen i.A. nicht erfüllt. Allerdings haben Sommer-Gewitter im SW der USA eher ein "kurzes" Gedächtnis.)

2. Wir betrachten das Problem als unrestringiertes Problem, i.e. die Systemdynamik ist durch

$$x_{k+1} = x_k - u_k + w_k$$

gegeben. Dies ist bei großen Wasserreservoirs, bei denen die Grenzwerte x_{max} bzw. x_{min} ohnehin nicht über/unterschritten werden zulässig.

Es kann nun nach der oben angegebenen Methode die optimale Feedback-Lösung berechnet werden.

Für Wasserreservoirprobleme ist es sinnvoll anzunehmen, dass innerhalb einer Periode die Zielwerte und die Parameter des Zielfunktionals konstant sind, i.e.

$$\alpha_k = \alpha, \quad \beta_k = \beta, \quad \underline{\vec{x}_k} = \underline{\vec{x}}, \quad \underline{\vec{u}_k} = \underline{\vec{u}}.$$

Unter diesen Annahmen erhält man als stationäre Lösung (siehe Übungsbeispiel)

$$u_k = \underline{u} + L(x_k - \underline{x})$$

mit

$$L = \frac{M}{M+\beta} \text{ sowie } M = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\alpha\beta}}{2}$$

Fallstudie: Tenkiller Ferry Lake

Anhand des Tenkiller Ferry Lake am Illinois River in Oklahoma wird die prinzipielle Anwendbarkeit dieser Methode gezeigt.

Daten: tägliche Werte des Wasserstandes, der Entnahmemenge, sowie der Zuflüsse bzw. Verdunstung über 11 Jahre.

Bei der Analyse wurden die Daten jeweils für einen Monat betrachtet.

Als Zielwerte $\underline{\vec{x}}$ bzw. $\underline{\vec{u}}$ und als Erwartungswert der Störgröße $\mu = \mathbb{E}(w)$ wurden jeweils die Monatsmittel herangezogen. (siehe Tabelle)

Monat	$\underline{u}(10^6 m^3)$	$\underline{x}(10^6 m^3)$	$u_{max}(10^6 m^3)$	$\mu(10^6 m^3)$
Jänner	1.07	346.92	6.32	1.57
Februar	0.84	346.71	4.26	1.99
März	1.15	360.63	5.51	2.94
April	1.54	363.76	6.27	2.77
Mai	0.76	351.49	2.66	1.79
Juni	0.88	365.56	3.83	1.71
Juli	0.46	350.37	2.51	0.29
August	0.37	338.46	1.59	0.31
September	0.26	326.53	1.57	0.45
Oktober	0.20	326.48	2.02	0.73
November	0.66	343.34	3.83	1.75
Dezember	1.07	358.95	6.23	2.70

Die Autoren haben in einer deskriptiven Analyse ein LQ-Modell an die historischen Daten angepasst. Aus

$$u_k - \underline{u} = L(x_k - \underline{x}_k)$$

erhält man mittels OLS-Schätzer

$$\hat{L} = (X'X)^{-1}X'U$$

wobei

$$X = \begin{pmatrix} x_1 - \underline{x} \\ \vdots \\ x_K - \underline{x} \end{pmatrix} \quad \text{und } U = \begin{pmatrix} u_1 - \underline{u} \\ \vdots \\ u_K - \underline{u} \end{pmatrix}$$

Für das Verhältnis der Parameter erhält man durch Umformen:

$$\widehat{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \left(\frac{\hat{L}^2}{1 - \hat{L}}\right)$$