Übungssammlung OR-Methoden im Energie & Umweltmanagement II

LQ-Modelle für das Problem des Reservoirmanagements

1.1. Betrachten Sie das im Artikel von Özelkan et al. ("Linear quadratic dynamic programming for water reservoir management", Appl. Math. Modelling 1997,21) formulierte LQ-Modell mit "Policy tracking".

$$\min \mathbb{E}\left\{(\vec{x}_K - \underline{\vec{x}}_K)' Q_K((\vec{x}_K - \underline{\vec{x}}_K) + \sum_{k=0}^{K-1} [(\vec{x}_k - \underline{\vec{x}}_k)' Q_k((\vec{x}_k - \underline{\vec{x}}_k) + (\vec{u}_k - \underline{\vec{u}}_k)' R_k((\vec{u}_k - \underline{\vec{u}}_k)]\right\}$$

unter der Dynamik

$$\vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k + B_k \vec{u}_k + \vec{w}_k$$

Dabei ist ($\vec{x}_k$ der Systemzustand, $\vec{u}_k$ die Kontrolle und $\vec{w}_k$ eine zufällige "Störung". Die $\vec{w}_k$ sind unabhängig und identisch verteilt mit Erwartungswert $\vec{\mu}$.

Zeigen Sie, dass dieses Problem unter der Annahme

$$B_{k+1} \underline{\vec{u}}_{k+1} = B_k \underline{\vec{u}}_k$$

mittels der Transformation

$$\begin{aligned} \vec{y}_k &= \vec{x}_k - k(\vec{\mu} + B_k \underline{\vec{u}}_k) \\ \underline{\vec{y}}_k &= \underline{\vec{x}}_k - k(\vec{\mu} + B_k \underline{\vec{u}}_k) \\ \vec{v}_k &= \vec{u}_k - \underline{\vec{u}}_k \\ \vec{z}_k &= \vec{w}_k - \vec{\mu} \end{aligned}$$

zu folgendem LQ-Modell äquivalent ist:

$$\min \mathbb{E}\left\{(\vec{y}_K - \underline{\vec{y}}_K)' Q_K((\vec{y}_K - \underline{\vec{y}}_K) + \sum_{k=0}^{K-1} [(\vec{y}_k - \underline{\vec{y}}_k)' Q_k((\vec{y}_k - \underline{\vec{y}}_k) + \vec{v}_k' R_k \vec{v}_k]\right\}$$

unter der Dynamik

$$\vec{y}_{k+1} = \vec{y}_k + B_k \vec{v}_k + \vec{z}_k$$

($\vec{y}_k \cdots$ Zustand, $\vec{v}_k \cdots$ Kontrolle, $\vec{z}_k \cdots$ zufällige "Störung", $\mathbb{E}\vec{z}_k = \vec{0}$, $\vec{z}_k$ unabhängig.)

1.2. Betrachten Sie folgendes Wasserreservoirproblem:

$$\min \mathbb{E}\left\{\sum_{k=0}^{K-1} \alpha(x_k - \underline{x})^2 + \beta(u_k - \underline{u})^2\right\}$$

unter der Dynamik $x_{k+1} = x_k - u_k + w_k$.
x_k bezeichnet dabei den Inhalt des Wasserreservoirs, u_k die abzulassende Menge und w_k zufällige Zu- bzw. Abflüsse, wobei $\mathbb{E}w_k = \mu$ gilt. Die "Targets" $\underline{x}$ bzw. $\underline{u}$ sind konstant.

Zeigen Sie, dass im stationären Fall die optimale Lösung durch

$$u_k^* = \frac{M}{M+\beta}(x_k - \underline{x}), \quad \text{mit } M = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\alpha\beta}}{2}$$

gegeben ist.

Hinweis: Die Riccati Gleichung

$$M = A'[M - MB(B'MB + R)^{-1}B'M]A + Q$$

vereinfacht sich im eindimmensionalen Fall sehr stark.

Stochastische Optimierung

2.1. Eine Raffinerie erzeugt aus 2 Rohölsorten R_1 bzw. R_2 die Destillate D_1 und D_2. Die Einkaufkosten betragen 3 GE für eine ME von R_1 und 4 GE je ME von R_2.

Der Bedarf an den Rohölen zur Produktion einer Einheit der Destillate ist in folgender Tabelle zusammengefasst:

	R_1	R_2
D_1	2	1
D_2	1	3

Der Bedarf an den Destillaten ist unsicher und folgendermaßen gegeben:

$P\{\text{Bedarf an } D_1 = 10\} =$	0.6	$P\{\text{Bedarf an } D_1 = 15\} =$	0.4
$P\{\text{Bedarf an } D_2 = 8\} =$	0.3	$P\{\text{Bedarf an } D_2 = 12\} =$	0.7

Weiters sei der Bedarf an D_1 und D_2 voneinander unabhängig.

Nicht gedeckter Bedarf führt zu Strafzahlungen von 15 Geldeinheiten je fehlender Einheit von D_1 bzw. zu 20 GE je ME von D_2.

Bestimmen Sie jenen Produktionsplan, der die Produktionskosten zuzüglich der erwarteten Strafzahlungen minimiert, unter der Kapazitätsbeschränkung, dass maximal 80 Einheiten Rohöl verarbeitet werden können.

2.2. Wie kann der Verkaufspreis der Produkte D_1 und D_2 in Beispiel (2.1) berücksichtigt werden?

Erweitern Sie das Beispiel (2.1) dahingehend, dass eine Einheit von D_1 zum Preis von 12 GE und eine Einheit von D_2 zum Preis von 18 GE verkauft wird. Als Zielfunktional soll nun der erwartete Verkaufserlös abzüglich der erwarteten Strafzahlungen und der Produktionskosten maximiert werden. (Für produzierte aber nicht verkaufte Produkte fallen nur Produktionskosten an, bleiben sonst aber unberücksichtigt.)

2.3. Ein Energieversorgungsunternehmen kann den Bedarf an Strom durch ein kalorisches Kraftwerk und ein Wasserkraftwerk abdecken.

Das kalorische Kraftwerk hat eine Leistung von 3 MW, und pro Betriebsstunde fallen Brennstoffkosten in der Höhe von 6 GE an. Die Kosten für den Betrieb des Wasserkraftwerkes sind vernachlässigbar. Die Leistung des Wasserkraftwerkes hängt von den Niederschlagsmengen ab. Aufgrund der Wettervorhersage im Planungszeitraum weiss man, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von 40% die Leistumg 1MW betragen wird und mit 60% Wahrscheinlichkeit 1.5 MW.

Der Bedarf im Planungszeitraum von 200 Stunden beträgt mit einer Wahrscheinlichkeit von 50% 500 MWh, mit einer Wahrscheinlichkeit von 50% beträgt er 350 MWh. Durch den Betrieb der Kraftwerke nicht gedeckter Bedarf muss von einem anderen Energieversorger zu einem Preis von 4 GE pro MWh zugekauft werden.

Formulieren und lösen Sie ein stochastisches lineares Optimierungsproblem zur Bestimmung der Betriebsstunden der beiden Kraftwerke, wenn die Kosten und die erwarteten Zahlungen für nicht gedeckten Bedarf minimiert werden sollen. (Der Bedarf und die Leistung des Wasserkraftwerkes sind voneinander unabhängige Zufallsvariable!)

2.4. Lösen Sie das folgende Optimierungsproblem mit Hilfe eines stochastischen Entscheidungsbaumes:

Ein Erdölunternehmen steht vor der Frage, ein Gebiet auf mögliche Erdölvorkommen zu untersuchen und gegebenenfalls Bohrungen durchzuführen.

Zunächst muss die Entscheidung getroffen werden, ob eine Voruntersuchung, die Kosten in der Höhe von 100000 $ verursacht, durchgeführt werden soll. Es wird angenommen, dass diese Voruntersuchung in 20 % aller Fälle ein überaus ertragreiches Ölfeld voraussagt, in 30 % ein mäßig ertragreiches Ölfeld und in 50% der Fälle einen vernachlässigbaren Ertrag prognostiziert.

Aus früheren Untersuchungen kennt man über die Verlässlichkeit dieser Voruntersuchung die folgenden bedingten Wahrscheinlichkeiten: Die Prognose eines überaus ertragreichen Ölfeldes ist zu 70% richtig, in 30% der Fälle jedoch stellt sich das Ölfeld als nur mässig ertragreich heraus.

Von der Voruntersuchung als "mäßig ertragreich" klassifizierten Ölfelder sind zu 20% nicht ertragreich, zu 10% überaus ertragreich, und in den restlichen 70% tatsächlich mäßig ertragreich.

90% der durch die Voruntersuchung als "nicht ertragreich" klassifizierten Ölfelder sind tatsächlich nicht ertragreich, die restlichen 10% sind mässig ertragreich.

In einem nächsten Schritt muss nun entschieden werden, ob das Ölfeld erschlossen und Bohrungen durchgeführt werden sollen. Dabei ist davon auszugehen, dass der Gewinn eines überaus ertragreichen Ölfeldes bei 5 000 000 $, bei einem mäßig ertragreichen Ölfeld bei 3 000 000 $ liegt. Bei einem nicht ertragreichen Ölfeld fallen Kosten in der Höhe von 500 000 $ an. (In diesen Gewinn/Kosten-Werten sind die Kosten der Voruntersuchung **nicht** inkludiert!)

Welche Entscheidungen sind zu treffen, wenn der erwartete Gewinn maximiert werden soll?

2.5. Der Energiebedarf im den Entscheidungen zugrundeliegenden Zeitraum ist zufällig und kann durch folgende Zufallsvariable beschrieben werden: mit Wahrscheinlichkeit von 50 % beträgt der Energiebedarf 150 Einheiten, mit 20% Wahrscheinlichkeit 100 Einheiten und die Wahrscheinlichkeit für einen Bedarf von 200 Einheiten beträgt 30%. Der Gewinn $G(x)$ für x Einheiten gelieferter Energie ist durch folgende Beziehung gegeben: $G(x) = (x - 20) * 1000$. (Zur Vereinfachung wird angenommen, dass **keine** Kosten entstehen, falls der Bedarf die angebotene Menge an Energie übersteigt.)

Die Kapazität des verfügbaren Kraftwerks liegt zur Zeit bei 130 Einheiten. Der Kraftwerksbetreiber überlegt daher, durch einen Bau eines weiteren Generators die Kapazität auf 200 Einheiten zu erhöhen. Dazu ist es jedoch nötig, zunächst den Bau zu planen und um eine Bewilligung durch die entsprechenden Behörden anzusuchen. Dieser Vorgang verursacht Kosten in der Höhe von 5000 GE. Von vergleichbaren Projekten weiss man, dass die Behörde mit Wahrscheinlichkeit von 60% den Bau genehmigt, mit 40% aber untersagt. Der Bau verursacht Kosten in der Höhe von 50000 GE.

Als Alternative könnte durch kleinere Umbauarbeiten (zu Koszen von 10000 GE) die Kapazität auf 150 Einheiten erhöht werden. Für diese kleineren Arbeiten ist keine Bewilligung erforderlich.

Welche Entscheidungen sind zu treffen, wenn der erwartete Gewinn maximiert werden soll? (In Stufe 1 muss zunächst entscheiden werden, ob der Plan für einen Großumbau gemacht und eingereicht werden soll. In einer zweiten Stufe muss entscheiden werden, ob kein Umbau, ein kleiner oder ein großer Umbau durchgeführt werden soll.)

2.6. Stellen Sie sich vor, Sie besitzen 5000 \$, die Sie investieren können. Sie haben die Gelegenheit, diesen Betrag am Anfang jedes der drei folgenden Jahre in eine von zwei Anlagemöglichkeiten (A oder B) zu investieren. Beide Investitionen führen zu unsicheren Rückflüssen. Bei Kapitalanlage A verliert man entweder sein gesamtes Geld, oder (mit größerer) Wahrscheinlichkeit bekommt man 10000\$ (der Gewinn beträgt 5000\$) am Ende des Jahres zurück. Bei Investition B bekommt man entwedergerade die eingesetzten 5000 \$ oder (mit geringerer Wahrscheinlichkeit) 10000\$ am Ende des Jahres zurück. Die Wahrscheinlichkeiten für diese Ereignisse lauten:

Investition	Rückfluss	Wahrscheinlichkeit
A	0	0.4
	10000	0.6
B	5000	0.9
	10000	0.1

Es ist nur erlaubt, jedes Jahr (höchstens) eine Investition zu tätigen und man kann jedes Mal nur 5000\$ anlegen. (Jeder zusätzliche angesammelte Geldbetrag ist zur anderweitigen Verfügung übrig.)

(a) Verwenden Sie die dynamische Optimierung, um die Investitionspolitik zu finden, die den erwarteten Geldbetrag maximiert, den man nach drei Jahren hat!

(b) Verwenden Sie die dynamische Optimierung, um die Investitionspolitik zu finden, die die Wahrscheinlichkeit dafür maximiert, dass man nach drei Jahren mindestens 10000\$ besitzt!

2.7. Der Betreiber einer ölbetriebenen Heizanlage will für die nächsten drei Monate die Bestellmengen bestimmen. Am Ende des dritten Monats soll der Tank geleert sein.

Der Verbrauch der Anlage ist bekannt und deterministisch und beträgt 1500 Liter im Monat. Die Preise $\tilde{p}_i$ sind stochastisch und deren Auspägung erst jeweils am Beginn des Monats zum Zeitpunkt der Bestellung bekannt.

$\tilde{p}_1$	Wahrscheinlichkeit
0.56	0.3
0.63	0.5
0.71	0.2

$\tilde{p}_2$	Wahrscheinlichkeit
0.52	0.5
0.60	0.3
0.75	0.2

$\tilde{p}_3$	Wahrscheinlichkeit
0.60	0.3
0.65	0.5
0.70	0.2

Weiters können nur Vielfache von 500 Litern bestellt werden und bei jeder Bestellung ist eine zusätzliche Pauschale in der Höhe von 100 GE zu entrichten. Das Fassungsvermögen des Tankes beträgt 4000 Liter.

Bestimmen Sie die optimalen Bestellmengen (die vom momentanen Füllstand des Tankes und vom Preis zum Zeitpunkt der Bestellung abhängen) zum Beginn jeder Periode, die die erwarteten Kosten minimieren.

2.8. Ein Tankstellenbesitzer will für die nächsten drei Perioden die Bestellmengen bestimmen. Wegen einer Tankinspektion soll am Endzeitpunkt der Tank leer sein, wobei etwaige Restmengen abgepumpt und entsorgt werden müssen, was Kosten in der Höhe von $0.02x$ für x Liter Treibstoff beträgt. Die Einkaufspreise p_i^E bzw. Verkaufspreise p_i^V je Liter sind deterministisch vorgegeben, die nachgefragten Mengen $\tilde{d}_i$ sind zufällig.

Periode	p_i^E	p_i^V
1	0.48	0.62
2	0.50	0.60
3	0.54	0.63

$\tilde{d}_1$	p
3000	0.3
4000	0.5
5000	0.2

$\tilde{d}_2$	p
2000	0.3
4000	0.3
6000	0.4

$\tilde{d}_3$	p
4000	0.1
5000	0.7
8000	0.2

Weiters können nur Vielfache von 1000 Litern bestellt werden und bei jeder Bestellung ist eine zusätzliche Pauschale in der Höhe von 150 GE zu entrichten. Das Fassungsvermögen des Tankes beträgt 12000 Liter.

Bestimmen Sie die optimalen Bestellmengen (die vom momentanen Füllstand des Tankes abhängen) zum Beginn jeder Periode, sodass der erwartete Gewinn maximiert wird.

Nichtlineare Optimierung

3.1. Das Kunststoffmantelrohr einer Fernwärmeleitung besteht aus einem inneren Stahlrohr mit einem Durchmesser $d_i = 10cm$, einer Wärmeisolierung der Dicke d und einem Mantelrohr mit Durchmesser $d_a = d_i + 2d$.

Die Wärmeleitfähigkeit der Dämmung ist mit $\lambda = 0.03 W/(K \times m)$ angegeben. (i.e. 0.03 Watt pro 1 Grad Kelvin Temperaturunterschied pro 1 Meter Dicke der Isolierung.) Die wirksame Temperaturdifferenz über die Dämmung soll $\Delta T = 100K$ betragen.

Der Wärmeverlust Q (pro Meter Fernwärmeleitung) wird mit folgender Formel berechnet:

$$Q = \frac{2\pi\lambda\Delta T}{\log(d_a/d_i)}$$

Die durch die Wärmeisolierung verursachte Erhöhung der Investitionskosten betragen $I = 50\log(d_a/d_i)$Euro pro verlegtem Meter der Wärmeleitung. Der Wärmeverlust wird durch Kosten von $k = 20$Euro$/MWh$ berücksichtigt.

Bestimmen Sie die optimale Dicke der Isolierung, wenn die Gesamtkosten, die sich aus den Kosten für den Wärmeverlust und den annuisierten Investitionskosten zusammensetzen, minimiert werden sollen. Dabei ist davon auszugehen, dass die Fernwärmeleitung 5000 Stunden im Jahr in Betrieb ist und der Annuitätsfaktor zur Bestimmung der annuisierten Investitionskosten $a = 0.1/$Jahr beträgt.

(Hinweis: Als Zielfunktional erhält man also

$$k \times Q \times 5000 + a \times I$$

Weiters ist es zweckmäßig, die Variablensubstitution $x = \log(d_a/d_i)$ vorzunehmen.)

3.2. Ein Heizkraftwerk mit einer Dampfentnahme-Kondensationsturbine soll ein $l = 2.5km$ entferntes Wohngebiet, das einen Wärmebedarf von $Q = 6MW$ hat, über ein temperaturgeregeltes erdverlegtes Zweileiternetz mit Heißwasser versorgen. Die Rücklauftemperatur soll $T_R = 60°C$ betragen.

Die Investitionskosten I für ein Leiterpaar betragen pro m Trasse, abhängig vom Rohrdurchmesser d

$$I = I_r + I_d \times d$$

wobei die Koeffizienten durch $I_r = 450$ Euro$/m$ bzw. $I_d = 750$ Euro$/m^2$ gegeben sind.

Die Vorlauftemperatur T beeinflusst den Koppelprozess im Heizkraftwerk. Die Kosten K_B aufgrund der Mindererzeugung von Elektoenergie durch Wärmeauskopplung bei $T > T_K$ soll nach der Formel

$$K_B = \eta \times p \times Q \times t_V \times \frac{T - T_K}{T}$$

bestimmt werden. Dabei bezeichnet

$\eta = 1/3$	...	Gütegrad
$p = 0.07$ Euro$/kWh$	···	Strompreis
$t_V = 2200$Stunden/Jahr	...	Voll-Laststunden
$T_K = 303.15K$	···	Kondensationstemperatur in der Turbine

Bestimmen Sie den Rohrdurchmesser d und die optimale Vorlauftemperatur T, die die Jahreskosten minimieren. Dabei setzen sich die Jahreskosten additiv aus den annuisierten Investitionskosten (Annuitätsfaktor $a = 0.1/$Jahr), den Kosten der Wärmeauskopplung K_B und den Kosten der Pumparbeit K_P zusammen.

Für die Kosten der Pumparbeit gilt:

$$K_P = \frac{\alpha}{d^5(T - T_R)^3}$$

wobei der Kostenparameter α durch $\alpha = 164831 m^5 K^3$Euro/Jahr gegeben ist.

(Hinweis: 0 Grad Kelvin ($0K$ = absoluter Nullpunkt) entspricht -273.15 Grad Celsius ($-273.15°C$). Der Temperaturunterscheid von 1 Grad Kelvin entspricht dem Temperaturunterschied von 1 Grad Celsius.)

3.3. Betrachten Sie ein Wasserkraftwerk, das aus einem Speichersee, einer Oberstufe, einem Ausgleichsbecken und einer Unterstufe besteht. Sowohl in der Oberstufe als auch in der Unterstufe stehen je zwei Generatoren zur Stromerzeugung zu Verfügung. Alle 4 Generatoren sind durch quadratische "Kosten"kurven charakterisiert, i.e. die zur abgegebenen elektrischen Leistung P_i (in MW) benötigte Wasserdurchflussmenge Q_i (in m^3/s) ist durch

$$Q_i = \alpha_i + \beta_i P_i + \gamma_i P_i^2$$

gegeben.

Das Kraftwerk soll nun eine elektrische Leistung von $200MW$ liefern. Weiters soll der Wasserinhalt des Ausgleichsbecken konstant bleiben. Wie muss nun die zu liefernde Leistung auf die einzelnen Generatoren verteilt werden, wenn möglichst wenig Speicherwasser eingesetzt werden soll?

Formulieren Sie ein entsprechendes Optimierungsproblem und lösen Sie es für die folgenden Parameterwerte:

	Oberstufe		Unterstufe	
Parameter	Generator 1	Generator 2	Generator 3	Generator 4
α_i	1.070	0.920	0.160	0.190
β_i	0.150	0.170	0.100	0.100
γ_i	0.002	0.001	0.001	0.002

3.4. Gegeben sei das folgende nichtlineare Optimierungsproblem

$$\begin{array}{rl} & \max \frac{x_1}{x_2+1} \\ \text{unter den Nebenbedingungen} & x_1 - x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

(i) Verwenden Sie die Kuhn-Tucker Bedingungen, um zu zeigen, dass $(x_1, x_2) = (4, 2)$ nicht optimal ist.

(ii) Leiten Sie eine Lösung ab, die die Kuhn-Tucker Bedingungen erfüllt.

(iii) Zeigen Sie, dass obiges Problem durch eine geeignete Variablentransformation in ein lineares Optimierungsproblem übergeführt werden kann.

3.5. Gegeben sei das folgende konvexe Optimierungsproblem

$$\begin{array}{rl} & \min x_1^2 - 6x_1 + x_2^3 - 3x_2 \\ \text{unter den Nebenbedingungen} & x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

(i) Ermitteln Sie die Kuhn-Tucker Bedingungen für das Problem.

(ii) Verwenden Sie die Kuhn-Tucker Bedingungen, um zu überprüfen, ob $(x_1, x_2) = (0.5, 0.5)$ eine optimale Lösung ist.

(iii) Benützen Sie die Kuhn-Tucker Bedingungen zur Bestimmung einer optimalen Lösung.

3.6. Zur Bereitstellung von Energie stehen zwei Energieträger nämlich Heizöl und Steinkohle zur Verfügung. Die Kosten, Energieinhalt und Inhalt eines Schadstoffes sind in folgender Tabelle gegeben:

	Heizöl	Steinkohle
Energie	42 MJ/kg	28 MJ/kg
Schadstoff	2 g /kg	10 g /kg
Kosten	75 cent/kg	25 cent/kg

Wie sind diese Energieträger einzusetzen, wenn mindestens 200000 MJ Energie bereitgestellt werden, sollen, maximal 3000 Euro ausgegeben werden dürfen, und die Schadstoffbelastung je Energieeinheit minimiert werden soll.