1 Grundlagen Entscheidungstheorie:

- Der Entscheidungsträger wählt aus einer Menge von Alternativen, dem **Aktionenraum** $A = \{a_1, a_2, \cdots a_m\}$.

  Annahmen:

  - Der Entscheidungsträger ist gezwungen, eine der betrachteten Alternativen zu ergreifen.
  - gleichzeitig kann immer nur **eine** der Alternativen realisiert werden, d.h. die Alternativen schließen einander aus.

- Das Ergebnis der gewählten Handlungsalternative hängt vom Umfeld ab. Die Menge aller relevanten Umfeldzustände $z_1, z_2, \cdots z_n$ bildet den Zustandsraum Z.

- Man unterscheidet **Entscheidung unter Unsicherheit,** falls keinerlei Information über die Eintrittswahrscheinlichkeiten der z_i vorliegt.

  Entscheidung unter Risiko, falls Eintrittswahrscheinlichkeiten bekannt sind.

- Die **Ergebnismatrix** gibt die Ergebnisse der einzelnen Alternativen für die einzelnen Umfeldzustände an, genauer e_{ij} beschreibt das Ergebis von Alternative a_i bei Umfeldzustand z_j.

	z_1	z_2	$\cdots$	z_n
	p_1	p_2	$\cdots$	p_n
a_1	e_{11}	e_{12}	$\cdots$	e_{1n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_m	e_{m1}	e_{m2}	$\cdots$	e_{mn}

Dominanzprinzipien:

absolute Dominanz

Eine Alternative a_i **dominiert** eine Alternative a_j **absolut**, wenn das schlechtestmögliche Ergebnis von a_i nicht kleiner als das bestmögliche Ergebnis von a_j ist.

$$a_i \text{ dominiert } a_j \text{ absolut } \Leftrightarrow \min_k e_{ik} \geq \max_l e_{jl}$$

(unter der Annahme, dass hohe Werte von e_{ij} angestrebt werden.)

Bsp:

	z_1	z_2	z_3	min	max
a_1	70	80	10	10	80
a_2	50	90	20	20	90
a_3	20	10	20	10	20

a_2 dominiert a_3 absolut.

Zustandsdominanz

Eine Alternative a_i **dominiert** eine Alternative a_j, wenn in jedem Umfeldzustand a_i besser bzw. mindestens gleich gut wie a_j ist, d.h.

$$a_i \text{ dominiert } a_j \Leftrightarrow \begin{cases} e_{ik} \geq e_{jk} & \text{für alle } k \\ e_{il} > e_{jl} & \text{für mindestens ein } l \end{cases}$$

Bsp:

	z_1	z_2	z_3	min	max
a_1	70	80	10	10	80
a_2	50	90	20	20	90
a_3	20	10	20	10	20
a_4	60	95	30	30	95

a_4 dominiert a_2 (im Sinn der Zustandsdominanz).

Wahrscheinlichkeitsdominanz:

(nur bei Entscheidung unter Risiko!)

Für jede Alternative a_i kann das Ergebnis als Zufallsvariable aufgefasst werden. Sei f_i die entsprechende Dichte und F_i die entsprechende Verteilungsfunktion dieser Zufallsvariablen.

a_i dominiert a_j nach dem Kriterium der **stochastischen Dominanz erster Ordnung**, falls

$$F_i(x) \leq F_j(x), \forall x, \quad \text{und } F_i(\tilde{x}) < F_j(\tilde{x}) \text{ für mindestens ein } \tilde{x}.$$

a_i dominiert a_j nach dem Kriterium der **stochastischen Dominanz zweiter Ordnung**, falls

$$\int_{-\infty}^{x} F_i(\xi)d\xi \leq \int_{-\infty}^{x} F_j(\xi)d\xi, \forall x$$

Bsp. 1:

	z_1	z_2	z_3	z_4
	$p_1 = 0.3$	$p_2 = 0.2$	$p_3 = 0.4$	$p_4 = 0.1$
a_1	20	40	10	50
a_2	60	30	50	20

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & x < 10 \\ 0.4 & 10 \leq x < 20 \\ 0.7 & 20 \leq x < 40 \\ 0.9 & 40 \leq x < 50 \\ 1 & 50 \leq x \end{cases} \qquad F_2(x) = \begin{cases} 0 & x < 20 \\ 0.1 & 20 \leq x < 30 \\ 0.3 & 30 \leq x < 50 \\ 0.7 & 50 \leq x < 60 \\ 1 & 60 \leq x \end{cases}$$

$$F_2(x) \leq F_1(x) \Leftrightarrow 1 - F_2(x) \geq 1 - F_1(x)$$

d.h. die Wahrscheinlichkeit, einen Gewinn höher als x zu erzielen ist bei Alternative a_2 größer als bei a_1.

Bsp. 2:

	z_1	z_2	z_3
	$p_1 = 0.4$	$p_2 = 0.2$	$p_3 = 0.4$
a_1	120	100	30
a_2	60	0	110

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & x < 30 \\ 0.4 & 30 \leq x < 100 \\ 0.6 & 100 \leq x < 120 \\ 1 & 120 \leq x \end{cases} \qquad F_2(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0.2 & 0 \leq x < 60 \\ 0.6 & 60 \leq x < 110 \\ 1 & 110 \leq x \end{cases}$$

$$F_2(x) - F_1(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0.2 & 0 \leq x < 30 \\ -0.2 & 30 \leq x < 60 \\ 0.2 & 60 \leq x < 100 \\ 0 & 100 \leq x < 110 \\ 0.4 & 110 \leq x < 120 \\ 0. & 120 \leq x \end{cases}$$

a_1 dominiert a_2 im Sinn der stochastischen Dominanz zweiter Ordnung, da $\int_{-\infty}^{x}(F_2(\xi) - F_1(\xi))d\xi \geq 0$

Entscheidung unter Ungewissheit

Maximin-Regel

andere Bezeichnungen: Mini-max Kriterium, Wald Regel

Wähle jene Alternative mit dem maximalen Minimum.

Bsp:

	z_1	z_2	z_3	z_4	min
a_1	60	30	50	60	30
a_2	50	90	20	20	20
a_3	60	95	30	-30	-30

$\Rightarrow$ Wähle a_1.

Eigenschaften:

- extrem risikoscheu, bewertet Alternativen nur nach dem schlechtesten Ergebnis.

	z_1	z_2	z_3	z_4	min
a_1	1000	1000	1	1000	1
a_2	1.1	1.1	1.1	1.1	1.1

  Nach der Maximin-Regel entscheidet man sich für a_2.

Maximax-Regel

Wähle jene Alternative mit dem maximalen Maximum.

Bsp:

	z_1	z_2	z_3	z_4	min	max
a_1	60	30	50	60	30	60
a_2	50	90	20	20	20	90
a_3	60	95	30	-30	-30	95

Wähle a_3.

Eigenschaften:

extrem risikofreudig, bewertet Alternativen nur nach dem besten Ergebnis.

Hurwicz-Regel

Kombination von Maximin-Regel und Maximax-Regel.

$\lambda \in [0, 1] \cdots$ Optimismusparameter

Wähle jene Alternative, für die der Präferenzwert $\Phi(a_i) = \lambda \max_j(e_{ij}) + (1 - \lambda) \min_j(e_{ij})$ maximal ist.

	z_1	z_2	z_3	z_4	min	max	Φ
a_1	60	30	50	60	30	60	42
a_2	50	90	20	20	20	90	48
a_3	60	95	30	-30	-30	95	20

$\Rightarrow$ Wähle a_2.

Savage-Niehans-Regel

andere Bezeichnungen: Regel des kleinsten Bedauerns, Minimax Regret Kriterium

- Bestimme für jede Spalte, d.h. für jeden Umfeldzustand, das Maximum der Ergebnismatrix.
- Bestimme die Matrix des Bedauerns, indem in jeder Spalte vom Spaltenmaximum der jeweilige Wert abgezogen wird, d.h. $r_{ij} = max_k(e_{kj}) - e_{ij}$
- Bestimme für jede Zeile, d.h. für jede Alternative, das Maximum der Regret-Matrix
- Wähle jene Alternative, für die das maximale Bedauern minimal ist.

	z_1	z_2	z_3	z_4
a_1	**60**	30	**50**	**60**
a_2	50	90	20	20
a_3	**60**	**95**	30	-30

Regret-Matrix:

	z_1	z_2	z_3	z_4	max
a_1	0	65	0	0	65
a_2	10	5	30	40	40
a_3	0	0	20	90	90

$\Rightarrow$ Wähle a_2.

Laplace-Kriterium:

Nehme an, dass jeder Umfeldzustand mit Wahrscheinlichkeit $p = 1/n$ angenommen wird.

	z_1	z_2	z_3	z_4	Φ
a_1	60	30	50	60	50
a_2	50	90	20	20	45
a_3	60	95	30	-30	38.75

$\Rightarrow$ Wähle a_1.

Axiomen-Katalog Milnors

zehn Axiome, denen eine brauchbare Entscheidungsregel genügen sollte:

1 **Ergebnis-Linearität:**

Die Präferenzrelation zwischen zwei bel. Alternativen a_1 und a_2 soll unverändert bleiben, wenn sämtliche Ergebniswerte $e_{ij}, i = 1, 2, j = 1, 2, \cdots, n$ der gleichen beliebigen positiv-linearen Transformation

$$e'_{ij} = \alpha + \beta e_{ij}, \quad \beta > 0$$

unterzogen werden:

2 **Zeilenhinzufügen:**

Die Präferenzrelation zwischen zwei bel. Alternativen a_1, a_2 soll nur durch den individuellen Vergleich von a_1 mit a_2 bestimmt werden, unabhängig vom Aussehen des sonstigen Aktionsraumes, d.h. insbesondere darf das Hinzufügen weiterer Alternativen die Präferenzrelation nicht beeinflussen.

3 **Addition zu einer Spalte:**

Die Präferenzrelation soll sich nicht ändern, wenn zu einer bestimmten Spalte eine Konstante addiert wird.

4 **Streichung einer identischen Spalte**

Die Präferenzrelation soll zwischen beliebigen Alternativen unverändert bleiben, wenn zwei Umweltzustände mit identischen Ergebnissen zu einem Umweltzustand zusammengefasst werden.

5 **Dominanz:**

Eine von einer anderen Alternative dominierte Alternative kann nicht optimal sein.

Die Savage-Niehans-Regel verletzt Axiom (4)
Maxi-Min Regel und Hurwicz-Regel verstossen gegen (3) und (5)
Laplace verletzt gegen (4)

2 Entscheidung unter Risiko:

Das $\mu-$ Prinzip:

Für jede Alternative a_i kann das Ergebnis als Zufallsvariable aufgefasst werden. Beim $\mu-$ Prinzip werden die Alternativen nun anhand des Erwartungswertes des Ergebnisses bewertet und jene

Alternative gewählt, für die der Erwartungswert maximal (bzw. minimal) ist.

Präferenzfunktion: $\Phi(a_i) = \mu_i = \Sigma_{j=1}^{n} e_{ij} p_j$

Bsp.

Eine faire Münze wird geworfen. Als Entscheidungsalternative können unterschiedlich hohe Einsätze gewählt werden. Der Gewinn ist gegeben durch:

	Kopf	Zahl	μ
	$p_1 = 0.5$	$p_2 = 0.5$	
a_1	-1	1	0
a_2	-10	10	0
a_3	-1000	1000	0
a_4	-1 000 000	1 000 000	0

Petersburger Paradoxon: Eine ideale Münze wird solange geworfen, bis zum ersten Mal "Zahl" erscheint. Erscheint beim $n-$ten Wurf zum ersten mal "Zahl", so erhält der Spieler 2^n Euro ausbezahlt.

Frage: Welchen Spieleinsatz wären Sie bereit zu zahlen, um an diesem Spiel teilzunehmen?

	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$\cdots$	n
p_i	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	$\dots$	2^{-n}
Gewinn(i)	2	2^2	2^3	$\cdots$	2^n
p_i*Gewinn(i)	1	1	1	$\cdots$	1

Der Erwartungswert ist " $+\infty$"

Entscheidung auf Grundlage von Erwartungswert und Streuung ($\mu - \sigma -$ Prinzip)

Verwende Varianz bzw. Standardabweichung als Mass für das Risiko:

$$Var(a_i) = \sigma_i^2 = \sum_{k=1}^{n} p_k(e_{ik} - \mu_i)^2$$

$\sigma_i = \sqrt{Var(a_i)} \cdots$ Standardabweichung

Die Präferenzfunktion hängt nun von Erwartungswert und Standardabweichung (bzw. Varianz) ab, $\Phi = \Phi(\mu, \sigma)$

Def: Ein Entscheidungsträger heißt **risikofreudig** wenn er bei gleichem Erwartungswert jene Alternative mit dem **größeren** Risiko vorzieht.

Ein Entscheidungsträger heißt **risikoscheu** (oder risiko-avers) wenn er bei gleichem Erwartungswert jene Alternative mit dem **kleineren** Risiko vorzieht.

Ein Entscheidungsträger heißt **risikoneutral** wenn er bei Alternativen mit gleichem Erwartungswert indifferent ist.

$\mu - \sigma -$ Kombinationen, die denselben Präferenzwert ergeben, bilden Indifferenzkurven $\Phi(\mu, \sigma)$ =const.

Häufige Ansätze für Präferenzfunktionen:

$$\Phi(\mu,\sigma) = \mu + \alpha\sigma$$

$$\Phi(\mu,\sigma) = \mu + \alpha\sigma^2$$

$$\Phi(\mu,\sigma) = \mu + \alpha(\mu^2 + \sigma^2)$$

2.1 "safety-first" criterion

Consider the following two lotteries:

x	$p(x)$
-8	$\frac{1}{11}$
3	$\frac{10}{11}$

y	$p(y)$
1	$\frac{10}{11}$
12	$\frac{1}{11}$

Computing expected value and variance leads to

$$E(x) = -\frac{8}{11} + \frac{30}{11} = 2, \qquad E(x^2) = \frac{64}{11} + \frac{90}{11} = \frac{154}{11}$$

$$E(y) = \frac{12}{11} + \frac{10}{11} = 2, \qquad E(y^2) = \frac{144}{11} + \frac{10}{11} = \frac{154}{11}$$

Using the $\mu/\sigma-$ criterion a decision maker would be indifferent.

Risk $\cong$ variability of $\tilde{x}$ below the threshold t.

Semi-Variance:

$$\sigma^{2-}(t) = \int_{-\infty}^{t}(x-t)^2 f(x)dx$$

Variance vs. Semi-Variance:

Variance: mean squared distance to the expected value

Semi-Variance: mean squared distance to the threshold, given that the values are below the threshold.

The decision is made according to the preference function

$$\Phi[\tilde{x}] = \mathbb{E}(\tilde{x}) + \alpha\sigma^{2-}(t)$$

Ex.

Consider the following 2 alternatives:

A		B	
x	p	x	p
0	0.20	-20	0.01
+5	0.30	+7	0.49
+11	0.50	+8	0.50

μ/σ **criterion:**

- B has a higher gain than A:

$$\mathbb{E}(\tilde{x}|A) = 7 < \mathbb{E}(\tilde{x}|B) = 7.23$$

- A has higher risk than B

$$\sigma^2(\tilde{x}|A) = 19 > \sigma^2(\tilde{x}|B) = 7.737$$

- $\Rightarrow$ a risk avers decision maker (i.e. $\alpha < 0$) chooses B, as $\Phi(\tilde{x}|A) = 7 + 19\alpha < 7.23 + 7.737\alpha = \Phi(\tilde{x}|B)$.

"safety first"-criterion

Assume that the threshold is $t = 0$ and $\alpha = -1$.

- A has no risk, as $\tilde{x}$ can never be below the threshold.
- Semi-Variance for B:

$$\sigma^{2-}(t = 0) = .01(-20 - 0)^2 = 4$$

- using the preference function $\Phi(\tilde{x}) = \mathbb{E}(\tilde{x}) - \sigma^{2-}(t = 0)$ one obtains

$$\Phi(\tilde{x}|A) = 7 - 1(0) = 7 \text{ and } \Phi(\tilde{x}|B) = 7.23 - 1(4) = 3.23$$

Portfolio-risiko

Folgende Tabelle gibt die Renditen zweier Wertpapiere A und B sowie die Rendite einer Portfolios P, das sich zu gleichen Teilen aus A und B zusammensetzt, an. Alle Umweltzustände sind gleich wahrscheinlich.

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	μ	σ^2	σ
p_i	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2			
r_A	0.11	0.09	0.250	0.070	-0.02	0.10	0.00760	0.0872
r_B	-0.03	0.15	0.020	0.200	0.06	0.08	0.00708	0.0841
r_P	0.04	0.12	0.135	0.135	0.02	0.09	0.00247	0.0497

Beobachtung: Das Risiko des Portfolios ist kleiner als die Risiken der einzelnen Wertpapiere.

Betrachten dies nun für Portfolios die sich beliebig aus r_a und r_b zusammensetzen und eine beliebige Korrelation aufweisen.

Bernoulli-Prinzip

Zur Lösung des Petersburger Paradoxons:

Statt des **Erwartungswertes** der möglichen Gewinne soll der erwartete **Nutzen** der Gewinne herangezogen werden (Daniell Bernoulli, 1738). Wiederentdeckt von John von Neumann und Oskar Morgenstern, 1944.

- Ordne den Ergebnissen e_{ij} jeder Alternative mit Hilfe einer Nutzenfunktion u Nutzenwerte $u(e_{ij})$ zu. $\Rightarrow$ Nutzenmatrix (bzw. Entscheidungsmatrix)

$$\begin{array}{c|cccc} & z_1 & z_2 & \cdots & z_n \\ & p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ \hline a_1 & u(e_{11}) & u(e_{12}) & \cdots & u(e_{1n}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_m & u(e_{m1}) & u(e_{m2}) & \cdots & u(e_{mn}) \end{array}$$

- Als entscheidungsrelevanter Präferenzwert $\Phi(a_i)$ wird der Erwartungswert der Nutzenwerte herangezogen:

$$\Phi(a_i) = E(u(a_i)) = \sum_{k=1}^{n} p_k u(e_{ik})$$

Bsp:

	z_1	z_2	z_3	z_4
	$p_1 = 0.4$	$p_2 = 0.1$	$p_3 = 0.2$	$p_4 = 0.3$
a_1	80	70	100	90
a_2	60	90	150	80

Nutzenfunktion $u(x) = \log(x)$

	z_1	z_2	z_3	z_4	$\Phi(a_i)$
	$p_1 = 0.4$	$p_2 = 0.1$	$p_3 = 0.2$	$p_4 = 0.3$	
a_1	4.38	4.25	4.61	4.50	4.449
a_2	4.09	4.50	5.01	4.38	4.402

Bemerkung: Für nach oben unbeschränkte Nutzenfunktionen löst das Bernoulli-Prinzip jedoch nicht das Petersburger Paradoxon.

	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$\cdots$	n	$\cdots$
p_i	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	$\ldots$	2^{-n}	$\cdots$
Gewinn(i)	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n	$\cdots$
Nutzen(i)	$u(x_1) = 2$	$u(x_2) = 2^2$	$u(x_3) = 2^3$	$\cdots$	$u(x_n) = 2^n$	$\cdots$
p_i*Nutzen(i)	1	1	1	$\cdots$	1	$\cdots$

Der Erwartungswert des Nutzens ist "$+\infty$"

Bestimmung der Nutzenfunktion:

Def:

In der ökonomischen Theorie werden Wahrscheinlichkeitsverteilungen als **Lotterien** (oder Chancen) bezeichnet.

Bsp:

In einer Entscheidungssituation unter Risiko bilden die möglichen Ergebnisse e_{ij} bei Wahl der Alternative a_i eine Lotterie.
$(e_{i1}, p_1; e_{i2}, p_2; \cdots; e_{in}, p_n)$.

Bsp:

Einfache Chance: bekomme mit Wahrscheinlichkeit p den "Gewinn" x und mit Wahrscheinlichkeit $1-p$ den "Gewinn" $y : (x, p; y)$

Satz:

Alle Nutzenfunktionen, die durch eine positive Lineartransformation auseinander hervorgehen, sind bezüglich des Bernoulli-Prinzips äquivalent (d.h. ergeben dieselbe Präferenzrelation zwischen den Alternativen.)

2 Nutzenfunktionen: $u_1(x), u_2(x)$
positive Lineartransformation: $u_2(x) = \alpha + \beta u_1(x), \beta > 0$,
Präferenzfunktionen: $\Phi_1(a_i) = E(u_1(a_i)), \quad \Phi_2(a_i) = E(u_2(a_i))$,

$\Phi_2(a_i) = E(u_2(a_i)) = E(\alpha + \beta u_1(a_i)) = \alpha + \beta E(u_1(a_i)) = \alpha + \beta\Phi_1(a_i)$

$\Phi_2(a_i) > \Phi_2(a_j) \Leftrightarrow \Phi_1(a_i) > \Phi_1(a_j)$

Bestimmung der Nutzenfunktion:

Aus der Menge der möglichen Ergebnisse wird das beste Ergebnis $\bar{e}$ und das schlechteste Ergebnis $\underline{e}$ ausgewählt.
Setze: $u(\bar{e}) = 1, \quad u(\underline{e}) = 0.$

Zur Ermittlung der Nutzenwerte $u(e_{ij})$ wird der Entscheidungsträger vor die Wahl
zwischen

- dem sicheren Ergebnis e_{ij}

und

- der einfachen Chance $(\bar{e}, p; \underline{e})$

gestellt.

Der Entscheidungsträger muss angeben, bei welcher Wahrscheinlichkeit p^* er zwischen dem sicheren Ergebnis und der Lotterie indifferent ist. Setze: $u(e_{ij}) = p^*$.

Def: Unter dem **Sicherheitsäquivalent** (SÄ) einer Lotterie versteht man jenen sicheren Betrag, der dem Entscheidungsträger gleichwertig mit der betrachteten Lotterie ist.

Mit anderen Worten: der Nutzen des Sicherheitsäquivalents s muss mit dem erwarteten Nutzen der Lotterie (bzw. Alternativen)

A übereinstimmen; $u(s) = E(u(A))$.

Risiko-einstellung:

Der Entscheidungsträger ist

- **risikoneutral** genau dann, wenn seine Nutzenfunktion **linear** ist.
- **risikofreudig** genau dann, wenn seine Nutzenfunktion **konvex** ist.
- **risikoscheu** genau dann, wenn seine Nutzenfunktion **konkav** ist.

Axiome des Bernoulli-Prinzips:

- **Ordinalprinzip:**
  - **Vergleichbarkeit**, i.e. für jedes Paar von Lotterien (bzw. Alternativen) a und b gilt: $a \succ b$ oder $a \sim b$ oder $a \prec b$.
  - **Transitivität,** i,e, aus $a \succ b$ und $b \succ c$ folgt $a \succ c$.
- **Dominanzprinzip** (Monotonieprinzip)

  Stehen zwei Alternativen in Form von einfachen Chancen $a_1 = (\bar{e}, p_1; \underline{e})$ und $a_2 = (\bar{e}, p_2; \underline{e})$ zur Auswahl ($\bar{e} > \underline{e}$) so gilt: $p_1 > p_2 \Rightarrow a_1 \succ a_2$.
- **Stetigkeitsaxiom:**

  Stehen eine sichere Alternative e und eine einfache Chance

$(\bar{e}, p; \underline{e})$ mit $\underline{e} < e < \bar{e}$ zur Auswahl, so gibt es eine Wahrscheinlichkeit p, sodass beide Alternativen äquivalent sind, i.e. $(e, 1) \sim (\bar{e}, p; \underline{e})$.

- **Substitutionsaxiom** (Unabhängigkeitsaxiom)

  Gegeben seien drei Lotterien (bzw. Alternativen) a_1, a_2, a_3.
  Es gilt:

$$a_1 \succ a_2 \quad \Leftrightarrow \quad (a_1, p; a_3) \succ (a_2, p; a_3) \forall p \in [0, 1]$$

Bsp:

Wir betrachten die folgenden Lotterien: $a_1 = (2000, 1), a_2 = (10000, 0.25; 0), a_3 = (10000, 1/3; 0)$.

Entsprechend dem Substitutionsaxiom gilt: $a_1 \sim a_2 \Rightarrow (a_1, 0.25; a_3) \sim (a_2, 0.25; a_3)$

Das Allais Paradoxon

Betrachten Sie folgende Lotterien:

$a = (2500, 0.33; 2400, 0.66; 0, 0.01)$

$b = (2400, 1)$

$c = (2500, 0.33; 0, 0.67)$

$d = (2400, 0.34; 0, 0.66)$

Versuchspersonen müssen dann ihre Präferenz zwischen a und b bzw. zwischen c und d bekannt geben. Die meisten Personen wählen: $b \succ a$ bzw. $c \succ d$. Dies widerspricht jedoch dem Unabhängigkeitsaxiom.

Def: Unter dem **Sicherheitsäquivalent** (SÄ) einer Lotterie versteht man jenen sicheren Betrag, der dem Entscheidungsträger gleichwertig mit der betrachteten Lotterie ist.

Mit anderen Worten: der Nutzen des Sicherheitsäquivalents s muss mit dem erwarteten Nutzen der Lotterie (bzw. Alternativen) A übereinstimmen; $u(s) = E(u(A))$.

Risiko-einstellung:

Der Entscheidungsträger ist

- **risikoneutral** genau dann, wenn seine Nutzenfunktion **linear** ist. Das Sicherheitsäquivalent stimmt mit dem Erwartungswert der unsicheren Alternative überein, i.e. $s = E(A)$.

- **risikoscheu** genau dann, wenn seine Nutzenfunktion **konkav** ist. Das Sicherheitsäquivalent ist kleiner als der Erwartungswert der unsicheren Alternative, $s < E(A)$.

  Die Differenz zwischen dem Erwartungswert der unsicheren Alternative und dem Sicherheitsäuivalent bezeichnet man als **Risikoprämie** $\pi = E(A) - s$. Die Risikoprämie ist jener Betrag, den ein Entscheidungsträger bereit ist zu zahlen, um ein sicheres Einkommen in der Höhe des Erwartungswertes zu erhalten, anstatt eine Unsicherheit in Kauf zu nehmen.

- **risikofreudig** genau dann, wenn seine Nutzenfunktion **konvex** ist. Das Sicherheitsäuivalent ist größer als der Erwartungswert der unsicheren Alternative, $s > E(A)$.

Maße der Risikoaversion:

Def:

Sei $u(x)$ eine zweimal differenzierbare streng monoton steigende Nutzenfunktion. Das **Arrow-Pratt Maß** der **absoluten** Risikoaversion ist gegeben durch

$$r_A(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$$

Der Koeffizient der **relativen** Risikoaversion ist gegeben durch:

$$r_R(x) = -\frac{xu''(x)}{u'(x)}$$

Ausgehend vom Vermögen x betrachten wir die Lotterie: $(x+\epsilon, 0.5+p; x-\epsilon, 0.5-p)$. Jener Wahrscheinlichkeitswert p für den der Entscheidungsträger zwischen der Lotterie und der sicheren Auszahlung x indifferent ist, heißt **Wahrscheinlichkeitssprämie.**

Vergleich von Entscheidungsträgern bzgl. ihrer Risikoaversion:

Wir betrachten zwei Entscheidungsträger mit monoton wachsenden Nutzenfunktionen u_1 bzw. u_2.

Satz:

äquivalent sind:

(1) $r_{A,2}(x) \geq r_{A,1}(x), \quad \forall x$

(2) es existiert eine monoton steigende konkave Funktion Ψ, sodass $u_2(x) = \Psi(u_1(x)), \forall x$ d.h. u_2 ist eine konkave Transformation von u_1

(3) Füer beliebige Lotterien ist das Sicherheitsäquivalent des ersten Entscheidungsträgers größer als das des zweiten. $s_1 \geq s_2$

(4) Für die Risikoprämien π gilt: $\pi_2 \geq \pi_1$ (für bel. Lotterien)

(5) Für die Wahrscheinlichkeitsprämie gilt: $p_2 \geq p_1, \forall x$

(6) Wenn Entscheidungsträger 2 eine unsichere Auszahlung X besser beurteilt als eine sichere $\bar{x}$, dann tut dies auch Entscheidungsträger 1. d.h.

$$E[u_2(X)] \geq u_2(\bar{x}) \quad \Rightarrow \quad E[u_1(X)] \geq u_1(\bar{x})$$

Satz:

Personen mit streng fallender absoluten Risikoaversion gehen höhere Risiken ein, je reicher sie sind.

Satz:

Falls sich zwei Nutzenfunktionen in 2 verschiedenen Punkten schneiden, so können sie nicht äquivalent sein.

Vergleich des Risikos von Lotterien mit gleichem Erwartungswert

Rothschild und Stiglitz, "Increasing Risk I, a Definition.", J. Economic Theory 2, 1970.

Eine Lotterie X ist riskanter als eine Lotterie Y, genau dann wenn einer der folgenden Punkte (und damit auch alle anderen) zutrifft:

- jeder im Sinn der Nutzentheorie risikoscheuer Entscheider bevorzugt die Lotterie Y gegenüber X i.e.

  $$E[u(Y)] \geq E[u(X)], \quad \forall \text{konkaven Nutzenfunktionen } u$$

- X dominiert Y im Sinn der stochastischen Dominanz zweiter Ordnung.

- X ist aus Y durch einen **mean preserving spread** gewonnen worden, d.h. aus der Mitte der Verteilung von Y werden Elemente herausgenommen und an den Rand der Verteilung transformiert, ohne den Erwartungswert zu verändern.

  z.B. X ist aus Y durch Addition einer Zufallsvariablen mit Erwartungswert 0 gewonnen worden. (zusammengesetzte Lotterien)

Dies ergibt eine Partialordnung auf der Menge der Lotterien mit gleichem Erwartungswert.

Andere Möglichkeit von früher: ($\mu - \sigma-$Prinzip) Ordne Lotterien mit gleichem Erwartungswert entsprechend ihrer Varianz. Dies ergibt eine Totalordnung.

Jedoch stimmen diese beiden Begriffe von "Risiko" **nicht** überein:

Bsp:

	μ	σ	$E(\sqrt{L_i})$
$L_1 = (10, 0.99; 1090, 0.01)$	20.8	11547.36	3.46
$L_2 = (1, 0.8; 100, 0.2)$	20.8	1568.16	2.8

Entscheidung bei Mehrfachzielsetzung:

Bsp. 1:

Ein Mineralölkonzern sucht einen Standort für eine neue Tankstelle. Als Alternativen kommen der Stadtrand (a_1) oder das Stadtzentrum (a_2) in Frage. Die erzielbaren Gewinne und Umsätze sind bekannt und in folgender Tabelle zusammengefasst:

	Gewinn	Umsatz
a_1 (Stadtrand)	150.000	1 800.000
a_2 (Stadtzentrum)	125.000	2 000.000

Will der Konzern sowohl Gewinn als auch Umsatz maximieren, so liegt ein **Zielkonflikt** vor.

allgemeines Modell:

$A = \{a_1, a_2, \cdots\} \quad \cdots \quad$ Menge von Alternativen

n Evaluatoren: $X_1, \cdots X_n$ ("Konsequenzen", "Ziele")

$a \mapsto (X_1(a), X_2(a), \cdots, X_n(a))$

$$R = \{(X_1(a), X_2(a), \cdots, X_n(a)) | a \in A\} \cdots \text{"Range-set"}$$

Suche Wertefunktion (Präferenzfunktion, Nutzenfunktion)

$v : \{(X_1, \cdots, X_n)\} \mapsto \mathbb{R}, \quad (x_1, \cdots, x_n) \to v(x_1, \cdots, x_n)$

die eine Präferenzordnung auf der Menge der Konsequenzen und damit auf A liefert.

$$v(x_1', \cdots, x_n') \geq v(x_1, \cdots, x_n) \Leftrightarrow (x_1', \cdots, x_n') \succeq (x_1, \cdots, x_n)$$

Bsp: Für $n = 2$:

$$\begin{aligned} v(x_1, x_2) &= c_1 x_1 + c_2 x_2, & c_i \geq 0 \\ v(x_1, x_2) &= x_1^{\alpha} x_2^{\beta}, & \alpha, \beta \geq 0 \\ v(x_1, x_2) &= c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 (x_1 - b_1)^{\alpha} (x_2 - b_2)^{\beta} & c_i, \alpha, \beta \geq 0 \end{aligned}$$

Def: Zwei Wertefunktionen heißen **(strategisch) äquivalent** falls sie die selbe Präferenzordnung induzieren.

Satz: Sei $T : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ eine monoton wachsende Funktion und v_1 eine Wertefunktion. Dann sind $v_2 = T \circ v_1$ und v_1 strategisch äquivalent.

Wünschenswert: partielle Nutzenfunktionen $v_i(x_i)$, und eine *einfache* Funtion f, sodass: $v(x_1, \ldots, x_n) = f(v_1(x_1), \ldots, v_n(x_n))$.

Die Bildung von partiellen Nutzenfunktionen ist nicht möglich, wenn die Präferenz bezüglich einer Konsequenz von den Werten der anderen Konsequenzen abhängt.

Bsp: $X_1 = \{\text{Weisswein, Rotwein}\}, \quad X_2 = \{\text{Steak, Fisch}\}$.

Mehrheitlich werden wohl folgende Präferenzen erwartet:

$$(\text{Rotwein, Steak}) \succ (\text{Weisswein, Steak})$$

$$(\text{Rotwein, Fisch}) \prec (\text{Weisswein, Fisch})$$

Eine isolierte Bewertung von Ziel 1 ist nicht möglich, da die Präferenz von der Ausprägung von Ziel 2 abhängt.

Präferenzunabhängigheit

$n = 2$: Ziel 1 heißt **präferenzunabhängig** von Ziel 2, falls gilt:

$$(x_1', \tilde{x}_2) \succeq (x_1, \tilde{x}_2) \Rightarrow (x_1', x_2) \succeq (x_1, x_2), \quad \text{für beliebiges } x_2, \tilde{x}_2$$

Gilt zusätzlich, dass Ziel 2 präferenzunabhängig von Ziel 1 ist, so heißen die beiden Ziele **gegenseitig präferenzunabhängig.**

Für allgemeines n gilt:

Betrachten eine Teilmenge von Konsequenzen und die dazu komplementäre Menge, d.h. der Vektor von Konsequenzen $\vec{x}$ wird partitioniert als $\vec{x} = (\vec{y}, \vec{z})$.

Def:

Die Menge von Konsequenzen $\vec{Y}$ ist präferenzunabhängig von der komplementären Menge $\vec{Z}$, genau dann wenn die bedingte Präferenzstruktur auf dem $\vec{y}-$ Raum für gegebenes $\vec{z}$ **nicht** von $\vec{z}$ abhängt, d.h.

$$[(\vec{y}', \vec{z}') \succeq (\vec{y}, \vec{z}')] \Rightarrow [(\vec{y}', \vec{z}) \succeq (\vec{y}, \vec{z})] \quad \vec{z}, \vec{y}, \vec{y}'.$$

Def: Die Konsequenzen $X_1, \cdots, X_n$ heißen **(stark) präferenzunabhäng** falls jede Teilmenge von Konsequenzen von ihrer Komplementärmenge präferenzunabhängig ist.

Im weiteren nehmen wir an, dass die Konsequenzen stark präferenzunabhängi sind und die partiellen Präferenzordnungen numerisch repräsentierbar sind. $\Rightarrow$ partielle Nutzenfunktionen.

Bemerkung:

- Durch Zusammenfassen präferenzabhängiger Ziele zu einer übergeordneten Zielgröße kann oft die Päferenzunabhängigkeit erreicht werden.
- Präferenzunabhängigkeit kann vielfach durch sinnvolle Einengung des Aktionenraums gewährleistet werden.

Def: Zwei Ziele verhalten sich zueinander

- **indifferent** (bzw. neutral) , wenn die Realisierung des einen

Zieles ohne jeden Einfluss auf den Realisierungsgrad des anderen Zieles ist.

- **komplementär** wenn durch die Erfüllung des einen Zieles auch der Realisierungsgrad des anderen Zieles gesteigert wird.

  Man unterscheidet **symmetrische Komplementarität** wenn die Abhängigkeit zwischen den Realisierungsgraden der beiden Ziele wechselseitig ist, und **asymmetrische Komplementarität** wenn ein erhöhter Realisierungsgrad des einen Zieles zwar zur Förderung des anderen Zieles führt aber nicht umgekehrt.

- **konkurrierend**, falls die Erfüllung eines Zieles den Realisierungsgrad des anderen Zieles beeinträchtigt.

Bsp: Asymmetrische Komplementarität liegt etwa zwischen "Kapitalrendite" und "Kapitalumschlag" vor. Eine Beschleunigung des Kapitalumschlags fördert die Kapitalrendite, eine verbesserte Kapitalrentabilität ist hingegen nicht notwendig mit einem beschleunigten Kapitalumschlag verbunden.

Indifferenzkurven und marginale Substitutionsrate

Betrachen den Fall von 2 Zielen X und Y.

Unter einer **Indifferenzkurve** versteht man die Menge

$$\{(x,y)|v(x,y)=c\}$$

Frage: Steigt X um Δ Einheiten, um wieviel muss Y fallen um indifferent zu bleiben, d.h.

$$(x+\Delta, y-?) \sim (x,y)$$

Wenn man am Punkt (x,y) bereit ist $\lambda\Delta$ Einheiten von Y aufzugeben, um Δ Einheiten von X zu gewinnen, so heißt λ die **marginale Substitutionsrate** von Y für X an der Stelle (x,y).

$$v(x,y)=c \Rightarrow y=y(x) \Rightarrow \lambda=-y'(x)$$

$$v(x,y(x))=c \Rightarrow \frac{\partial v(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0$$

$$\Rightarrow \lambda=\frac{\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)}$$

Dominanz

Def: Der Konsequenzvektor $\vec{x}'$ **dominiert** $\vec{x}$, falls

$x_i' \geq x_i, \quad \forall i$ und

$x_j' > x_j, \quad$ für mindestens ein j.

Eine Alternative heißt **ineffizient**, falls $X(a)$ von mindestens einem Konsequenzvektor $\vec{x} \in R$ dominiert wird, d.h. falls mindestens ein $a' \in A$ existiert, mit

$x_i(a') \geq x_i(a), \quad \forall i$ und

$x_j(a') > x_j(a), \quad$ für mindestens ein j.

Die Menge der Konsequenzvektoren in R, die **nicht dominiert** sind, heißt **effiziente Grenze** von R oder Pareto optimale Menge.

Bsp:

	x_1	x_2	x_3	x_4
a_1	0	2	7	2
a_2	4	4	8	6
a_3	4	2	14	3
a_4	14	1	15	4
a_5	10	2	20	3

a_1 ist ineffizient, da von a_2 dominiert und a_3 ist ineffizient, da von a_5 dominiert.

Spezielle Entscheidungsregeln:

Lexikographische Ordnung:

Ordne die Zielvektoren (bzw. die Alternativen) allein nach dem wichtigsten Ziel. Stimmt bei Zielvektoren das wichtigste Ziel überein, so ordne sie nach dem zweitwichtigsten Ziel, etc.

Bsp: Angenommen das primäre Ziel ist Gewinnmaximierung und das zweite Ziel ist Umsatzmaximierung.

	Gewinn	Umsatz
a_1	150.000	800.000
a_2	149.000	1 800.000
a_3	120.000	500.000
a_4	120.000	800.000
a_5	125.000	800.000

Nach der Lexikographischen Ordnung erhält man die Präferenzstruktur:

$a_1 \succ a_2 \succ a_5 \succ a_4 \succ a_3$

Maximierung des minimalen Zielerreichungsgrades

Körth (1969)

Voraussetzung: verhältnisskalierte Nutzenmessung.

1. Berechne für jede Alternative und jedes Ziel den Erreichungsgrad des Zieles.

   Erreichungsgrad des Zieles = Quotient aus tatsächlichem Nutzenwert und dem maximalen Nutzenwert.

$$\frac{v_i(x_i(a_j))}{\max_k v_i(x_i(a_k))}$$

2. Bilde für jede Alternative, den minimalen Zielerreichungsgrad (Zeilenminimum).

$$v(\vec{x}(a_j)) = \min_i \left(\frac{v_i(x_i(a_j))}{\max_k v_i(x_i(a_k))} \right)$$

3. Wähle jene Alternative, für die der minimale Zielerreichungsgrad maximal ist.

Bsp:

	x_1	x_2	x_3	x_4
a_1	0	2	7	2
a_2	4	4	8	6
a_3	4	2	14	3
a_4	14	1	15	4
a_5	10	2	20	3
max	14	4	20	6

Zielerreichungsgrad:

	x_1	x_2	x_3	x_4	min.
a_1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{1}{3}$	0
a_2	$\frac{2}{7}$	1	$\frac{8}{20}$	1	$\frac{2}{7}$
a_3	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{14}{20}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{7}$
a_4	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{15}{20}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$
a_5	$\frac{5}{7}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Wähle a_5, da bei dieser Alternative jedes Ziel zu mehr als 50% erreicht wird.

Goal-Programming

Der Entscheidungsträger soll bestimme Zielvorgaben erfüllen. Er wählt daher jene Alternative, sodass die Abweichung von den Zielvorgaben minimal wird.

Sei $\hat{x}_i$ die Zielvorgabe für Ziel X_i so gilt:

$$v(\vec{x}(a_j)) = -\sum_i |x_i(a_j) - \hat{x}_i|$$

Verallgemeinerungen:

- unterschiedliche Gewichtung der Abweichungen bei verschiedenen Zielen
$$v(\vec{x}(a_j)) = -\sum_i \alpha_i |x_i(a_j) - \hat{x}_i|$$
- unterschiedliche Gewichtung ob Abweichung von der Zielgröße nach oben oder nach unten erfolgt.
$$v(\vec{x}(a_j)) = -\sum_i \alpha_i |x_i(a_j) - \hat{x}_i|^+ - \sum_i \beta_i |x_i(a_j) - \hat{x}_i|^-$$
wobei
$$|x|^+ = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases} \qquad |x|^- = \begin{cases} 0 & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Bsp: $\hat{x}_1 = 6, \hat{x}_2 = 5, \hat{x}_3 = 14, \hat{x}_4 = 8$

	x_1	x_2	x_3	x_4
a_1	0	2	7	2
a_2	4	4	8	6
a_3	4	2	14	3
a_4	14	1	15	4
a_5	10	2	20	3

	$\mid$	x_i	$-\hat{x}_i$	$\mid$	$v(\vec{x}(a_j))$
a_1	6	3	7	6	-22
a_2	2	1	6	2	-11
a_3	2	3	0	5	-10
a_4	8	4	1	4	-17
a_5	4	3	6	5	-18

Wähle a_3

Zielgewichtung:

Wahl von positiven Gewichten g_i. Multiplikation der partiellen Nutzen $v_i(x_i)$ mit den Gewichten und anschliessendes Aufsummieren.

$$v(\vec{x}(a_j)) = \sum_i g_i v_i(x_i(a_j))$$

Bsp:

Der Entscheidungsträger hat eine Dringlichkeitsordnung bezüglich der Ziele $X_1, \cdot, X_4$ im Verhältnis $4 : 3 : 2 : 1$. Daraus ergeben sich die Gewichte: $g_1 = 0.4, g_2 = 0.3, g_3 = 0.2, g_1 = 0.1$.

	x_1	x_2	x_3	x_4	$\Sigma\, g_i v_i(x_i)$
a_1	0	2	7	2	2.2
a_2	4	4	8	6	5.0
a_3	4	2	14	3	5.3
a_4	14	1	15	4	9.3
a_5	10	2	20	3	8.9

Wähle a_4.

Entscheidung bei Mehrfachzielsetzung:

Keeney R. L., Raiffa H. (1993)

Theorem 3.6:

Gegeben seien die Konsequenzen $X_1, \cdots, X_n$. Eine additive Wertefunktion

$$v(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} v_i(x_i)$$

existiert genau dann, wenn die Konsequenzen stark präferenzunabhängig sind.

Gegenbeispiel (siehe Fishburn 1979)

$X = \{1, 2, 3\} \times \{1, 3, 5\}$.

$$(x_1, x_2) \prec (y_1, y_2) \Leftrightarrow u(x_1, x_2) < u(y_1, y_2)$$

mit $u(x_1, x_2) = x_1 x_2 + (x_1)^{x_2}$.

Dies ergibt:

$$u(2,1) = 4 \qquad u(1,3) = 4$$

$$u(1,5) = 6 \qquad u(3,1) = 6$$

$$u(2,5) = 42 \qquad u(3,3) = 36$$

Da die Wertefunktion für festes x_2 in x_1 monoton wachsend ist, und für festes x_1 in x_2 monoton wachsend ist, sind X_1 und X_2 voneinander präferenzunabhängig.

Angenommen es gibt eine additive Wertefunktion $u(x_1, x_2) = u_1(x_1) + u_2(x_2)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} u_1(2) + u_2(1) &= u_1(1) + u_2(3) \\ u_1(1) + u_2(5) &= u_1(3) + u_2(1) \end{aligned}$$

und nach Addieren und Kürzen

$$u_1(2) + u_2(5) = u_1(3) + u_2(3)$$

d.h. $(2,5)$ und $(3,3)$ müssten äquivalent sein. Dies ist jedoch ein Widerspruch zu $u(2,5) = 42 > 36 = u(3,3)$.

Bemerkung: Präferenzunabhängigkeit ist eine **notwendige** Bedingung für die Existenz einer additiven Wertefunktion aber sie ist **nicht hinreichend.**

Im weiteren nehmen wir jedoch an, dass die Präferenzordnung auf X durch eine additive Wertefunktion beschrieben werden kann, i.e. es existieren partielle Wertefunktionen $v_i(x_i)$ und die Präferenzordnung auf X ist durch $v(x_i) = \Sigma_{i=1}^n w_i v_i(x_i)$ gegeben.

MAUT

Multi **A**ttribute **U**tility **T**heory

Es wird jene Alternative a_i gewählt, für die der entsprechende Konsequenzenvektor $\vec{x}(a_i)$ die additive Wertefunktion $v(x_i) = \Sigma_{i=1}^n w_i v_i(x_i)$ maximiert:

Üblicherweise gelten die Normierungen:

$$\sum_i w_i = 1, \quad 0 \leq w_i \leq 1, \quad 0 \leq v_i(x_i) \leq 1.$$

1. **Bestimmen der partiellen Wertefunktionen:**

   - Wie bei der Bestimmung des Nutzens im Rahmen der Bernoulli-Nutzentheorie:

     $$v_i(x_i^{min}) = 0, \quad v_i(x_i^{max}) = 1, \quad (x_i^{max}, p; x_i^{min}, 1{-}p) \sim x_i \to v_i(x_i) =$$

   - Medianverfahren

2. **Bestimmen der Gewichte** w_i :

   Man vergleicht für beliebiges $x_3, \cdots, x_n$:

   $$(x_1^{min}, x_2^{max}) \sim (?, x_2^{min})$$

   d.h.

   $$w_1 v_1(u_1^{min}) + w_2 v_2(u_2^{max}) + \sum_{i=3}^n v_i(x_i) = w_1 v_1(?) + w_2 v_2(u_2^{min}) + \sum_{i=3}^n v_i(x_i)$$

da $v_i(x_i^{min}) = 0$ und $v_i(x_i^{max}) = 1 \quad \Rightarrow w_2 = w_1 v_1(?)$.

Bemerkung: Insgesamt erhält man $n(n-1)$ Paarvergleiche und damit $(n(n-1)+1$ Gleichungen zur Bestimmung der n Gewichte. Ein Problem bei MAUT ist, dass es aufgrund dieser Überbestimmtheit zu Inkonsistenzen kommt.

AHP

Analytical **H**ierarchy **P**rocess

Grundidee: Auflösen des Oberzieles eines multikriteriellen Entscheidungsproblems in eine Hierachie von Unterzielen.

Das Bestimmen der partiellen Wertefunktionen und der Gewichte erfolgt auf sehr ähnliche Weise.

Im einfachsten Fall: Ein Oberziel, dessen Nutzen als gewichtete Summe der (partiellen) Nutzen der Alternativen bezüglich der einzelnen Konsequenzen gegeben ist.

D.h. bilden einer Präferenzfunktion $\Phi^{AHP} = \Sigma_{i=1,n}\, g_i v_i(.)$.

Bestimmen der Wertefunktionen

Wir betrachten eine Konsequenz X_k und n Alternativen $a_i, i = 1, \cdots n$ und wollen $v_k(a_i)$ bestimmen (k fest, $i = 1, \cdots n$).

Möglichkeit 1: Auswahl einer Alternative, z.B der Schlechtesten. Setzen $v_k(a^{\min}) = 0$ und bestimmen durch Vergleich die $v_k(a_i)$. Normieren derart, dass Wert der besten Alternative $= 1$ ist.

Insgesamt $n - 1$ Vergleichurteile erforderlich. Da der Vergleich jeweils mit einer bestimmten Alternative erfolgt, besteht die Gefahr systematischer Fehler.

Möglichkeit II: Jede Alternative a_i wird mit jeder Alternative a_j verglichen $\Rightarrow \quad n(n-1)$ Vergleichsurteile.

Der Paarvergleich wird durch **Verhältnisse** ausgedrückt, d.h. der Entscheidungsträger gibt an, um wieviel eine Alternative a_i besser ist als Alternative a_j im Hinblick auf Konsequenz X_k.

Man erhält eine **empirische Paarvergleichsmatrix**

$$V = \begin{pmatrix} 1 & v_k(1,2) & \cdots & v_k(1,n) \\ v_k(2,1) & 1 & & v_k(2,n) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ v_k(n,1) & \cdots & v_k(n,n-1) & 1 \end{pmatrix}$$

dabei bedeutet z.B. $v_k(i,j) = 3$, dass a_i 3-mal besser eingeschätzt wird als a_j bezüglich Konsequenz X_k.

Oft wird angenommen, dass der Paarvergleich nur Werte zwischen 1 und 9 annehmen kann (und die Reziprokwerte).

Es wird angenommen, dass die Matrix V reziprok ist, d.h.

$$v_k(i,j) = \frac{1}{v_k(j,i)}$$

Verhielte sich der Entscheidungsträger **konsistent** müsste ausserdem

$$v_k(i,j)v_k(j,l) = v_k(i,l)$$

gelten. (Konsistenzbedingung)

Ziel des AHP: Bestimmen einer konsistenten Wertefunktion, die möglichst gut den Angaben des Entscheidungsträgers entspricht.

Betrachten zunächst die konsistente Situation:

$$v_k(i,j) = \frac{v_k(a_i)}{v_k(a_j)}$$

d.h. das Verhältnis entspricht dem Quotienten der partiellen Wertefunktionen.

Klarerweise ist die Konsistenzbedingung erfüllt:

$$v_k(i,j)v_k(j,l) = \frac{v_k(a_i)}{v_k(a_j)}\frac{v_k(a_j)}{v_k(a_l)} = \frac{v_k(a_i)}{v_k(a_l)} = v_k(i,l)$$

Eine **konsistente Paarvergleichsmatrix** hat also die Gestalt

$$\bar{V} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{v_k(a_1)}{v_k(a_2)} & \cdots & \frac{v_k(a_1)}{v_k(a_n)} \\ \frac{v_k(a_2)}{v_k(a_1)} & 1 & & \frac{v_k(a_2)}{v_k(a_n)} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{v_k(a_n)}{v_k(a_1)} & \cdots & \frac{v_k(a_n)}{v_k(a_{n-1})} & 1 \end{pmatrix}$$

Bestimme nun eine konsistente Paarvergleichsmatrix, d.h. eine partielle Wertefunktion $v_k(a_i)$ die möglichst der empirischen Matrix entspricht:

Regressionsanalytischer Ansatz:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(v_k(i,j) - \frac{v_k(a_i)}{v_k(a_j)} \right)^2 \rightarrow \min,$$

unter den Nebenbedingungen: $v_k(a_i) \geq 0, \sum v_k(a_i) = 1$.

Eigenwertverfahren: Gegeben ist die inkonsistente empirische Matrix V und gesucht ist ein Vektor $\vec{v} = (v_k(a_1), v_k(a_2), \cdots, v_k(a_n))^t$ der die Wertefunktion konsistent approximiert.

Angenommen, die empirische Matrix ist konsistent. Dann gilt:

$$v_k(i,j) = \frac{v_k(a_i)}{v_k(a_j)} \quad \Rightarrow v_k(i,j) v_k(a_j) = v_k(a_i) \quad \forall i,j = 1, \ldots n$$

Durch Summieren

$$\sum_{j=1}^{n} v_k(i,j) v_k(a_j) = n v_k(a_i) \quad \forall i = 1, \ldots n$$

d.h. unter Konsistenz gilt:

$$V\vec{v} = n\vec{v}$$

Somit ist n Eigenwert von V und $\vec{v}$ ist der dazugehörende Eigenvektor.

Nun gilt für konsistente Paarvergleichsmatrizen, dass der größte Eigenwert n ist, und alle anderen Eigenwerte $= 0$ sind. D.h. in der konsistenten Situation ist $\vec{v}$ der Eigenvektor zum grössten Eigenwert von V.

Für **inkonsistente** Paarvergleichsmatrizen bestimmt man nun $\vec{v}$ ebenfalls als Eigenvektor zum grössten Eigenwert der Paarvergleichsmatrix. Er wird derart normiert, dass $\Sigma_i \, v_k(a_i) = 1$.

Inkonsistenzmass Für positive reziproke $n \times n-$Matrizen gilt stets: $\lambda^{max} \geq n$.

$$\Rightarrow \quad IK = \frac{\lambda^{max} - n}{n - 1} \cdots \text{Inkonsistenzmass}$$

Je grösser IK ist, desto inkonsistenter sind die Paarvergleiche des Entscheidungsträgers. Ist $IK > 0.1$ so sollte der Entscheidungsträger seine Vergleichsurteile nochmals überdenken.

Bestimmen der Gewichte: Die Bestimmung der Gewichte erfolgt analog zur Bestimmung der Wertefunktion. Bezüglich verschiedener Konsequenzen X_k und X_l müssen Vergleichsurteile $G(k, l)$ abgegeben werden. Bei Konsistenz gilt:

$$G(k, l) = \frac{g_k}{g_l}$$

Es werden konsistente Gewichte bestimmt, die so gut wie möglich die tatsächlichen Urteile approximieren.

Bsp:

Wohnung	Lärmbelästigung	Größe	Entfernung
A	laut	52 qm	30 min
B	sehr laut	23 qm	5 min
C	leise	15 qm	25 min
D	noch nicht zu laut	30 qm	15 min

Präferenzurteile bezüglich **Lärm:**

	A	B	C	D
A	1	3	1/5	1/3
B		1	1/9	1/5
C			1	4
D				1

1 = gleichwertig, 3=etwas günstiger, 5=günstiger, 7=viel günstiger, 9=sehr viel günstiger

Bezüglich Lärm ist Wohnung A "etwas günstiger" als B. etc.

Eigenwert: $\lambda^{max} = 4.127$, Eigenvektor: (0.110, 0.048, 0.611, 0.231). d.h. die partielle Wertefunktion ist: $v_L(A) = 0.110, v_L(B) = 0.048, v_L(C) = 0.611, v_L(D) = 0.231$. Das Inkonsistenzmass ist: $IK = 0.042$.

Bezüglich Grösse:

	A	B	C	D
A	1	7	9	5
B		1	3	1/4
C			1	1/5
D				1

$\lambda^{max} = 4.231, \vec{v}_G = (0.650, 0.087, 0.045, 0.218)^t, IK = 0.077$

Bezüglich Entfernung:

	A	B	C	D
A	1	1/9	1/3	1/5
B		1	8	5
C			1	1/4
D				1

$\lambda^{max} = 4.230, \vec{v}_G = (0.045, 0.659, 0.083, 0.213)^t, IK = 0.076$

Bestimmen der Gewichte:

	Lärm	Grösse	Entfernung
Lärm	1	1/3	4
Grösse		1	9
Entfernung			1

$\lambda^{max} = 3.01, (g_L, g_G, g_E) = (0.250, 0.681, 0.069)$

$\Rightarrow$ Präferenzfunktion $\Phi^{AHP}(.) = g_L v_L(.) + g_G v_G(.) + g_E v_E(.)$

Wohnung	A	B	C	D
Φ^{AHP}	0.474	0.117	0.189	0.220

$\Rightarrow$ Präferenzordnung: A $\succ$ D $\succ$ C $\succ$ B