Wasserreservoir-Management als Beispiel für stochastische, dynamische Optimierung

(entnommen aus: "Linear quadratic dynamic programming for water reservoir management", E.C. Özelkan et al., Applied Math. Modelling, vol.21)

Wasserreservoirs dienen zur

- Energieerzeugung
- Bewässerung
- Hochwasserschutz
- $\cdots$

Grundmodell

- diskrete Zeit mit endlichem Zeithorizont (indiziert durch $k = 0, 1, \cdots, K$)
- $S_k \cdots$ Zustandsraum (zum Zeitpunkt k), $k = 0, \cdots, K$,
- $x_k \cdots$ Zustand des Systems zum Zeitpunkt k, $x_k \in S_k$.
- $C_k \cdots$Entscheidungsraum (zum Zeitpunkt k)
- $u_k \cdots$ Kontrolle (Entscheidungsvariable)
- $w_k \cdots$Störgröße, Zufallsvariable, w_k kann von x_k und u_k abhängen, nicht jedoch von $w_{k-1}, \cdots, w_0$

Die Systemdynamik (i.e. Änderung des Zustandes mit der Zeit) wird durch folgende Gleichung beschrieben

$$x_{k+1} = f_k[x_k, u_k, w_k], \quad k = 0, \cdots, K-1$$

Die Menge der **zulässigen** Politiken besteht aus Folgen von Funktionen $\pi = (\mu_0, \mu_1, \cdots, \mu_{K-1})$, wobei $\mu_k : S_k \to C_k$ eine Entscheidungsfunktion ist, die jedem Zustand x_k eine Kontrolle $u_k = \mu_k(x_k) \in C_k(x_k)$ zuordnet.

Problemstellung:

Finde (bei gegebenen Anfangszustand x_0) eine zulässige Politik π , sodass das Kostenfunktional

$$J_\pi(x_0) = \mathbb{E}\left\{g_k(x_k) + \sum_{k=0}^{K-1} g_k(x_k, \mu_k(x_k)w_k)|x_0\right\}$$

minimiert wird.

LQ-Modell:

lineare Systemdynamik:

$$\vec{x}_{k+1} = A_k\vec{x}_k + B_k\vec{u}_k + \vec{w}_k$$

$S_k \subset \mathbb{R}^n, \quad C_k \subset \mathbb{R}^m, \quad A_k \cdots n \times n - \text{Matrix}, \quad B_k \cdots n \times m - \text{Matrix}$

quadratische Kosten

$$\mathbb{E}\left\{\vec{x}_K' Q_K \vec{x}_K + \sum_{k=0}^{K-1} (\vec{x}_k' Q_k \vec{x}_k + \vec{u}_k' R_k \vec{u}_k)|\vec{x}_0\right\}$$

Weiters werden folgende Annahmen getroffen:

$Q_k \cdots$ symmetrische, positiv semidefinite Matrizen

$R_k \cdots$ symmetrische, positiv definite Matrizen

$w_k \cdots$ haben Erwartungswert 0, endliche Varianz, Verteilungen sind unabhängig von $\vec{x}_k$ und $\vec{u}_k$

Erweiterungen des LQ-Modells:

"tracking problem"

Der Zustand des Systems soll möglichst einem vorgegebenen Zustandspfad $\underline{\vec{x}_k}$ folgen. Es soll also folgendes Kostenfunktional minimiert werden:

$$\mathbb{E}\left\{(\vec{x}_K - \underline{\vec{x}_K})' Q_K (\vec{x}_K - \underline{\vec{x}_K}) + \sum_{k=0}^{K-1} ((\vec{x}_k - \underline{\vec{x}_k})' Q_k (\vec{x}_k - \underline{\vec{x}_k}) + \vec{u}_k' R_k \vec{u}_k)|\vec{x}_0\right\}$$

Anwenden der dynamischen Optimierung liefert folgende lineare optimale Feedback-Lösung:

$$\vec{\mu}_k^*(\vec{x}_k) = L_k(\vec{x}_k - \underline{\vec{x}_k}), \quad \forall k = 0, \cdots, K-1$$

wobei L_k durch

$$L_k = -(B_k' M_{k+1} B_k + R_k)^{-1} B_k' M_{k+1} A_k \tag{1}$$

und die (symmetrischen und positiv semi-definiten) Matrizen M_k rekursiv durch $M_K := Q_K$ und die Riccati-Gleichung

$$M_k := A_k' \left[M_{k+1} - M_{k+1} B_k (B_k' M_{k+1} B_k + R_k)^{-1} B_k' M_{k+1} \right] A_k + Q_k \tag{2}$$

gegeben sind.

Stationäre Lösung:

Falls die Matrizen A_k, B_k, Q_k,sowie R_k unabhängig von der Zeit k sind, dann strebt M_k gegen die Gleichgewichtslösung M, die die algebraische Riccati-Gleichung

$$M = A' \left[M - MB(B'MB + R)^{-1} B'M \right] A + Q$$

erfüllt.

Für einen entsprechend großen Zeithorizont kann daher die optimale Politik durch

$$\mu^*(\vec{x}) = L(\vec{x} - \underline{\vec{x}_k})$$

angenähert werden, wobei

$$L = -(B'MB + R)^{-1} B'MA$$

gilt.

"policy tracking"

Eine weitere Verallgemeinerung besteht darin, dass nun die Kontrolle $\vec{u}_k$ vorgegebenen Zielwerten $\underline{\vec{u}_k}$ folgen soll und weiters der Erwartungswert des Störterms von 0 verschieden ist, i.e. $\mathbb{E} w_k = \mu \neq 0$.

Bei Wasserreservoir Management Problemen entsprechen die vorgebenen Zielwerte der Kontrolle etwa einer idealen Wasserentnahme für Bewässerung, Schiff-fahrt bzw. Energieerzeugung.

Der Störterm beschreibt zufällige Zuflüsse, deren Erwartungswert positiv ist.

Als Zielfunktional ist nun

$$\mathbb{E}\left\{(\vec{x}_K - \underline{\vec{x}_K})' Q_K (\vec{x}_K - \underline{\vec{x}_K}) + \sum_{k=0}^{K-1} ((\vec{x}_k - \underline{\vec{x}_k})' Q_k (\vec{x}_k - \underline{\vec{x}_k}) + (\vec{u}_k - \underline{\vec{u}_k})' R_k (\vec{u}_k - \underline{\vec{u}_k})) | \vec{x}_0 \right\}$$

zu minimieren, unter der Dynamik

$$\vec{x}_{k+1} = A_k \vec{x}_k + B_k \vec{u}_k + \vec{w}_k$$

wobei nun $\mathbb{E}\vec{w}_k = \vec{\mu}$.

Unter den Voraussetzungen

$$A_k = I (= \text{ Einheitsmatrix}) \quad \text{ und } B_{k+1}\underline{u_{k+1}} = B_k \underline{u_k}$$

ist durch die Transformation

$$\begin{aligned}
\vec{y}_k &= \vec{x}_k - k(\vec{\mu} + B_k \underline{\vec{u}_k}) \\
\underline{\vec{y}_k} &= \underline{\vec{x}_k} - k(\vec{\mu} + B_k \underline{\vec{u}_k}) \\
\vec{v}_k &= \vec{u}_k - \underline{\vec{u}_k} \\
\vec{z}_k &= \vec{w}_k - \vec{\mu}
\end{aligned}$$

das obige Problem äquivalent zu

$$\min \mathbb{E}\left\{(\vec{y}_K - \underline{\vec{y}_K})' Q_K (\vec{y}_K - \underline{\vec{y}_K}) + \sum_{k=0}^{K-1} ((\vec{y}_k - \underline{\vec{y}_k})' Q_k (\vec{y}_k - \underline{\vec{y}_k}) + \vec{v}_k' R_k \vec{v}_k) | \vec{y}_0 \right\}$$

unter der Dynamik

$$\vec{y}_{k+1} = \vec{y}_k + B_k \vec{v}_k + \vec{z}_k$$

wobei die $\vec{z}_k$ identisch, unabhängig verteilt sind mit $\mathbb{E}\vec{z}_k = 0$. (siehe Übungsbeispiel)

Als optimale feedback Lösung erhält man also

$$\vec{v}_k = L_k(\vec{y}_k - \underline{\vec{y}_k}) = L_k(\vec{x}_k - \underline{\vec{x}_k})$$

bzw.

$$\vec{u}_k = \underline{\vec{u}_k} + L_k(\vec{x}_k - \underline{\vec{x}_k})$$

wobei L_k durch Gleichung (1) gegeben ist.

Anwendung auf Wasserreservoir Management

$$x_{k+1} = \max\{x_{min}, \min\{x_{max}, x_k + (f_k + y_k - e_k) - u_k\}\}$$

wobei

x_k	$\cdots$	Wasserstand des Reservoirs
x_{min}, x_{max}	$\cdots$	minimaler / maximaler Wasserstand
f_k	$\ldots$	Zuflüsse in das Reservoir, Zufallsvariable
y_k	$\cdots$	Niederschläge auf das Reservoir, Zufallsvariable
e_k	$\cdots$	Verdunstung, Zufallsvariable
$u_k \in [u_{min}, u_{max}]$	$\cdots$	Wasserentnahme, Kontrollvariable

Einerseits soll nun die entnommene Wassermenge u_k vorgegebenen Mengen $\underline{u_k}$ folgen (z.B. Bewässerung in der Landwirtschaft, Energieerzeugung, etc.), andererseits soll auch der Wasserstand im Reservoir von einem vorgegebenen Niveau $\underline{x_k}$ nicht allzuweit abweichen (z.B. Erholungs- und Freizeitaktivitäten).

Bei einem quadratischen Ansatz erhält man als zu minimierendes Zielfunktional

$$\min_{u_k} \mathbb{E}\left\{\sum_{k=0}^{K-1} \alpha(x_k - \underline{x_k})^2 + \beta(u_k - \underline{u_k})^2 | x_k\right\}$$

Um obiges Lösungsverfahren auf dieses Wasserreservoir-Problem anwenden zu können, sind folgende Annahmen zu treffen:

1. Die zufälligen Wasserzuflüsse, Regen und Verdunstung werden mittels

$$w_k = f_k + y_k - e_k$$

zu einem zufälligen Störterm w_k zusammengefasst. Es wird angenommen, dass die w_k unabhängig und identisch verteilt sind (i.i.d.) mit Mittelwert $\mathbb{E}w_k = \mu$ und Varianz Var $(w_k) = \sigma^2$.

(Diese Annahme ist bei hydro/climatischen Systemen i.A. nicht erfüllt. Allerdings haben Sommer-Gewitter im SW der USA eher ein "kurzes" Gedächtnis.)

2. Wir betrachten das Problem als unrestringiertes Problem, i.e. die Systemdynamik ist durch

$$x_{k+1} = x_k - u_k + w_k$$

gegeben. Dies ist bei großen Wasserreservoirs, bei denen die Grenzwerte x_{max} bzw. x_{min} ohnehin nicht über/unterschritten werden zulässig.

Es kann nun nach der oben angegebenen Methode die optimale Feedback-Lösung berechnet werden.

Für Wasserreservoirprobleme ist es sinnvoll anzunehmen, dass innerhalb einer Periode die Zielwerte und die Parameter des Zielfunktionals konstant sind, i.e.

$$\alpha_k = \alpha, \quad \beta_k = \beta, \quad \underline{\vec{x}_k} = \underline{\vec{x}}, \quad \underline{\vec{u}_k} = \underline{\vec{u}}.$$

Unter diesen Annahmen erhält man als stationäre Lösung (siehe Übungsbeispiel)

$$u_k = \underline{u} + L(x_k - \underline{x})$$

mit

$$L = \frac{M}{M + \beta} \text{ sowie } M = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\alpha\beta}}{2}$$

Fallstudie: Tenkiller Ferry Lake

Anhand des Tenkiller Ferry Lake am Illinois River in Oklahoma wird die prinzipielle Anwendbarkeit dieser Methode gezeigt.

Daten: tägliche Werte des Wasserstandes, der Entnahmemenge, sowie der Zuflüsse bzw. Verdunstung über 11 Jahre.

Bei der Analyse wurden die Daten jeweils für einen Monat betrachtet.

Als Zielwerte $\underline{\vec{x}}$ bzw. $\underline{\vec{u}}$ und als Erwartungswert der Störgröße $\mu = \mathbb{E}(w)$ wurden jeweils die Monatsmittel herangezogen. (siehe Tabelle)

Monat	$\underline{u}(10^6 m^3)$	$\underline{x}(10^6 m^3)$	$u_{max}(10^6 m^3)$	$\mu(10^6 m^3)$
Jänner	1.07	346.92	6.32	1.57
Februar	0.84	346.71	4.26	1.99
März	1.15	360.63	5.51	2.94
April	1.54	363.76	6.27	2.77
Mai	0.76	351.49	2.66	1.79
Juni	0.88	365.56	3.83	1.71
Juli	0.46	350.37	2.51	0.29
August	0.37	338.46	1.59	0.31
September	0.26	326.53	1.57	0.45
Oktober	0.20	326.48	2.02	0.73
November	0.66	343.34	3.83	1.75
Dezember	1.07	358.95	6.23	2.70

Die Autoren haben in einer deskriptiven Analyse ein LQ-Modell an die historischen Daten angepasst. Aus

$$u_k - \underline{u} = L(x_k - \underline{x}_k)$$

erhält man mittels OLS-Schätzer

$$\hat{L} = (X'X)^{-1}X'U$$

wobei

$$X = \begin{pmatrix} x_1 - \underline{x} \\ \vdots \\ x_K - \underline{x} \end{pmatrix} \quad \text{und } U = \begin{pmatrix} u_1 - \underline{u} \\ \vdots \\ u_K - \underline{u} \end{pmatrix}$$

Für das Verhältnis der Parameter erhält man durch Umformen:

$$\left(\frac{\hat{\alpha}}{\beta}\right) = \left(\frac{\hat{L}^2}{1-\hat{L}}\right)$$

(Lineare) stochastische Optimierung

Bsp:

Aus zwei Sorten Rohöl wird Benzin und Heizöl erzeugt. Die Produktivität sowie der Mindestbedarf (pro Woche) und die Kosten sind in folgender Tabelle angegeben:

	Rohöl 1	Rohöl 2	Bedarf
Benzin	2	6	180
Heizöl	3	3	162
Kosten	2	3	

Weiters besteht eine Kapazitätsbeschränkung, dass maximal 100 Einheiten Rohöl pro Woche verarbeitet werden können.

Man ist also mit folgendem linearen Optimierungsproblem konfrontiert:

$$\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 &\Rightarrow \min \\
x_1 + x_2 &\leq 100 \\
2x_1 + 6x_2 &\geq 180 \\
3x_1 + 3x_2 &\geq 162 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}$$

Als kostengünstigsten Produktionsplan erhält man $x_1 = 36, x_2 = 18$ und die minimalen Kosten betragen 126 GE.

Angenommen, sowohl der Mindestbedarf als auch die Produktivitäten unterliegen Zufallsschwankungen und sind bei Erstellung des Produktionsplans noch nicht bekannt.

	Rohöl 1	Rohöl 2	Bedarf
Benzin	$2 + \tilde{\eta}_1$	6	$180 + \tilde{\zeta}_1$
Heizöl	3	$3.4 - \tilde{\eta}_2$	$162 + \tilde{\zeta}_2$
Kosten	2	3	

wobei $\tilde{\zeta}_1 \sim \mathcal{N}(0, 12)$, $\tilde{\zeta}_2 \sim \mathcal{N}(0, 9)$, $\tilde{\eta}_1 \sim \mathcal{U}(-0.8, 0.8)$, $\tilde{\eta}_2 \sim \mathcal{EXP}(\lambda = 2.5)$.

Weiters wird angenommen, dass die unbeschränkten Zufallsvariablen $\tilde{\zeta}_1, \tilde{\zeta}_2$ und $\tilde{\eta}_2$ nur Werte innerhalb folgender 99% Konfidenzintervalle annehmen:

$$\zeta_1 \in [-30.91, 30.91], \qquad \zeta_2 \in [-23.18, 23.18], \qquad \eta_2 \in [0.0, 1.84]$$

Man ist also mit folgendem stochastischen linearen Optimierungsproblem konfrontiert:

$$\begin{array}{rcrcl} 2x_1 & + & 3x_2 & \Rightarrow & \min \\ x_1 & + & x_2 & \leq & 100 \\ (2+\tilde{\eta}_1)x_1 & + & 6x_2 & \geq & 180+\tilde{\zeta}_1 \\ 3x_1 & + & (3.4-\tilde{\eta}_2)x_2 & \geq & 162+\tilde{\zeta}_2 \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

- Dieses Optimierungsproblem ist nicht wohldefiniert, da völlig unklar ist, was eine "optimale" Lösung bedeuten soll, solang die Realisierungen der Zufallsvariablen unbekannt sind.
- Änderung von ζ_i bewirkt eine Parallelverschiebung der Begrenzungsgeraden des zulässigen Bereichs.
- Änderung von η_i bewirkt eine Drehung.

Fat Solution: Eine Lösung, die für alle Realisierungen der Zufallsvariablen (in den oben angegebenen Intervallen) zulässig ist.

In unserem Beispiel tritt der "schlechteste" Fall für $\zeta_1 = 30.91, \zeta_2 = 23.18, \eta_1 = -0.8, \eta_2 = 1.84$ ein. Als "Fat Solution" erhält man: $x_1 = 48.49, x_2 = 25.45$ und die Kosten betragen 173.34 GE.

Andere Möglichkeit:

Für nicht erfüllte Nachfrage sind von der Raffinerie Strafzahlungen zu entrichten, und zwar 7 bzw. 12 Geldeinheiten je nicht gelieferter Mengeneinheit Benzin bzw. Heizöl.

Gesucht ist ein Produktionsplan, der die Summe aus Produktionskosten und erwarteten Regress-kosten minimiert.

Notation:

$\tilde{\xi} := (\tilde{\zeta}_1, \tilde{\zeta}_2, \tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2)^t$

$y_i(\tilde{\xi}) \cdots$ Regress-variable, gibt die nicht-erfüllte Nachfrage an.

Weiters:

$$\begin{aligned} \alpha(\tilde{\xi}) &:= 2 + \tilde{\eta}_1, & \beta(\tilde{\xi}) &:= 3.4 - \tilde{\eta}_2 \\ h_1(\tilde{\xi}) &:= 180 + \tilde{\zeta}_1, & h_2(\tilde{\xi}) &:= 162 + \tilde{\zeta}_2. \end{aligned}$$

Man erhält folgendes stochastisches Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & + & \mathbb{E}_{\tilde{\xi}}[7y_1(\tilde{\xi}) & + & 12y_2(\tilde{\xi})] & \Rightarrow & \min \\ x_1 & + & x_2 & & & & & \leq & 100 \\ \alpha(\tilde{\xi})x_1 & + & 6x_2 & + & y_1(\tilde{\xi}) & & & \geq & h_1(\tilde{\xi}) \\ 3x_1 & + & \beta(\tilde{\xi})x_2 & & & + & y_2(\tilde{\xi}) & \geq & h_2(\tilde{\xi}) \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0 & & & & \end{array}$$

Probleme:

- multivariate Integration bei Erwartungswertberechnung
- Funktionen $y_i(\xi)$ sind implizit gegeben.

Falls die Zufallsvariable $\tilde{\xi}$ eine endliche diskrete Verteilung besitzt, i.e. $\tilde{\xi}$ nimmt mit Wahrscheinlichkeiten p_i die Werte ξ^i an, $i = 1, \cdots, r$, so erhält man das folgende lineare Optimierungsproblem

$$
\begin{array}{rcrcrcrcl}
2x_1 & + & 3x_2 & + & \sum_{i=1}^{r} p_i[7y_1(\xi^i) & + & 12y_2(\xi^i)] & \Rightarrow & \min \\
x_1 & + & x_2 & & & & & \leq & 100 \\
\alpha(\xi^i)x_1 & + & 6x_2 & + & y_1(\xi^i) & & & \geq & h_1(\xi^i) \quad \forall i = 1, \cdots r \\
3x_1 & + & \beta(\xi^i)x_2 & & & + & y_2(\xi^i) & \geq & h_2(\xi^i) \quad \forall i = 1, \cdots r \\
x_1 & & & & & & & \geq & 0 \\
& & x_2 & & & & & \geq & 0 \\
& & & & y_1(\xi^i) & & & \geq & 0 \quad \forall i = 1, \cdots, r \\
& & & & & & y_2(\xi^i) & \geq & 0 \quad \forall i = 1, \cdots, r
\end{array}
$$

d.h. man erhält ein lineares Optimierungsproblem mit 2r + 2 Variablen $(x_1, x_2, y_1(\xi^1), y_2(\xi^i))$ und 2r + 1 Nebenbedingungen.

Approximation stetiger Verteilungen

Die Verteilung der stetigen Zufallsvariable $\tilde{\xi}$ kann folgendermaßen durch eine diskrete endliche Zufallsvariable approximiert werden:

- generiere eine große (z.B. $K = 10000$) Zufallsstichprobe $\xi_i, i = 1, \cdots, K$
- Zerlege das 99%-Intervall in r Teil-"Intervalle" $I_j, j = 1, \cdots, r$.
- Wähle als mögliche Ausprägungen ξ^j der disketen Approximation die Mittelpunkte dieser Teilintervalle
- Schätze die Wahrscheinlichkeit p_j der Ausprägung ξ^j durch die relative Häufigkeit der Elemente der Zufallsstichprobe, die im Intervall I_j liegen.

Duale Dekompositionsmethode

Betrachten das Problem

$$
\begin{aligned}
\{\vec{c}^t\vec{x} + \vec{q}^t\vec{y}\} &\rightarrow \min \\
\text{s.t.} \qquad A\vec{x} &= \vec{b} \\
T\vec{x} + W\vec{y} &= \vec{h} \\
\vec{x} \geq 0, \vec{y} \geq 0 &
\end{aligned}
$$

Annahmen:

- Das Problem ist lösbar
- Die Menge $\{\vec{x}|A\vec{x} = \vec{b}, \vec{x} \geq \vec{0}\}$ ist beschränkt.

Dieses Problem kann zu folgendem äquivalenten Problem umformuliert werden:

$$
\begin{aligned}
\{\vec{c}^t\vec{x} + f(\vec{x})\} &\rightarrow \min \\
\text{s.t.} \qquad A\vec{x} &= \vec{b} \\
\vec{x} &\geq \vec{0}
\end{aligned}
$$

wobei

$$f(\vec{x}) = \min\{\vec{q}^t\vec{y}|W\vec{y} = \vec{h} - T\vec{x}, \vec{y} \geq \vec{0}.\}$$

Weiters kann dieses Problem umformuliert werden zu

$$
\begin{aligned}
\{\vec{c}^t\vec{x} + \theta\} &\rightarrow \min \\
\text{s.t.} \qquad A\vec{x} &= \vec{b} \\
\theta - f(\vec{x}) &\geq \vec{0} \\
\vec{x} &\geq \vec{0}
\end{aligned}
$$

Dualer Dekompositions-Algorithmus

- **Schritt 1:** Sei θ_0 eine untere Schranke für

$$min\{\vec{q}^t\vec{y}|A\vec{x} = \vec{b}, T\vec{x} + W\vec{y} = \vec{h}, \vec{x} \geq \vec{0}, \vec{y} \geq \vec{0}\}$$

Löse das Problem

$$min\{\vec{c}^t\vec{x} + \theta | A\vec{x} = \vec{b}, \theta \geq \theta_0, \vec{x} \geq \vec{0}\}$$

Dies führt zu einer Lösung $(\hat{\vec{x}}, \hat{\theta})$. Sei $\mathcal{B}_1 := \{\mathbb{R}^n \times \{\theta\} | \theta \geq \theta_0\}$.

- **Schritt 2:** Evaluiere die Regress Funktion

$$\begin{aligned} f(\hat{\vec{x}}) &= min\{\vec{q}^t\vec{y} | W\vec{y} = \vec{h} - T\hat{\vec{x}}, \vec{y} \geq 0\} = \\ &= \max\{(\vec{h} - T\hat{\vec{x}})^t\vec{u} | W^t\vec{u} \leq \vec{q}\} \end{aligned}$$

Man muss nun zwischen den folgenden zwei Fällen unterscheiden:

  - $f(\hat{\vec{x}}) = +\infty$

    dann ist $\hat{\vec{x}}$ nicht zulässig bezüglich aller Nebenbedingungen des Optimierungsproblems.

    $\Rightarrow$ Es existiert ein $\tilde{\vec{u}}$ sodass $W^t\tilde{\vec{u}} \leq \vec{0}$ und $(\vec{h} - T\hat{\vec{x}})^t\tilde{\vec{u}} > 0$ ist.

    Andererseits muss für jedes zulässige $\vec{x}$ ein $\vec{y}$ existieren, sodass

    $$W\vec{y} = \vec{h} - T\vec{x} \tag{3}$$

    gilt. Skalarmultiplikation von (3) mit $\tilde{\vec{u}}$ ergibt

    $$\tilde{\vec{u}}^t(\vec{h} - T\vec{x}) = \underbrace{\tilde{\vec{u}}^t W}_{\leq 0} \underbrace{\vec{y}}_{\geq 0} \leq 0.$$

    Daher kann durch die zusätzliche Nebenbedingung

    $$\tilde{\vec{u}}(\vec{h} - T\vec{x}) \leq 0$$

    die unzulässige Lösung $\hat{\vec{x}}$ "weggeschnitten" werden (feasibility cut). Schränken nun den Parameterraum ein zu $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_1 \cap \{(\vec{x}^t, \theta) | \tilde{\vec{u}}^t(\vec{h} - T\vec{x}) \leq 0\}$. Gehe zu Schritt 3.

  - $f(\hat{\vec{x}})$ ist endlich. Dann gibt es zu $\hat{\vec{x}}$ eine primale Lösung $\hat{\vec{y}}$ und eine duale Lösung $\hat{\vec{u}}$.

Die Dualität ergibt:

$$f(\hat{\vec{x}}) = (\vec{h} - T\hat{\vec{x}})^t\hat{\vec{u}},$$

für alle anderen Vektoren $\vec{x}$ gilt jedoch

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) &= sup\{(\vec{h} - T\vec{x})^t\vec{u}|W^t\vec{u} \leq \vec{q}\} \\ &\geq (\vec{h} - T\vec{x})^t\hat{\vec{u}} \\ &= \hat{\vec{u}}^t(\vec{h} - T\vec{x}\} \end{aligned}$$

Falls die aktuelle Lösung $(\hat{\vec{x}}, \hat{\theta})$ die Nebenbedingung $f(\vec{x}) \leq \theta$ erfüllt, (i.e. falls $f(\hat{\vec{x}}) \leq \hat{\theta}$) hat man eine optimale Lösung gefunden.

Anderenfalls impliziert die Nebenbedingung $\theta \geq f(\vec{x})$ die lineare Nebenbedingung

$$\theta \geq \hat{\vec{u}}^t(\vec{h} - T\vec{x})$$

Durch die zusätzliche Nebenbedingung

$$\theta \geq \hat{\vec{u}}^t(\vec{h} - T\vec{x})$$

wird die sub-optimale Lösung $(\hat{\vec{x}}, \hat{\theta})$ "weggeschnitten" (optimality cut) Schränken nun den Parameterraum ein zu $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_1 \cap \{(\vec{x}^t, \theta)|\hat{\vec{u}}^t(\vec{h} - T\vec{x}) \leq \theta\}$. Gehe zu Schritt 3.

Schritt 3: Löse das modifizierte Problem

$$\min\{\vec{c}^t\vec{x} + \theta|(\vec{x}^t, \theta) \in \mathcal{B}_1\}$$

Dies ergibt eine Lösung $(\tilde{\vec{x}}, \tilde{\theta})$. Setze nun $(\hat{\vec{x}}, \hat{\theta}) := (\tilde{\vec{x}}, \tilde{\theta})$ und gehe zu Schritt 2.

Unter den obigen Voraussetzungen führt dieser Algorithmus in endlich vielen Schritten zur optimalen Lösung.

Dynamische Optimierung:

allgemeine Form mit zu minimierender Zielfunktion:

$$\begin{aligned} \text{minimiere } F(x_0, x_1, \cdots, x_n) &= \textstyle\sum_{k=0}^{n} r_k(z_k, x_k) \\ \text{unter den Nebenbedingungen} & \\ z_{k+1} &= G_k(z_k, x_k) \\ z_k &\in Z_k \\ x_k &\in X_k(z_k) \\ z_0 &= a \\ z_n &= b \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet:

n	Anzahl der Zeitpunkte
$z_k \in Z_k$	Zustand des Systems im Zeitpunkt $k, k = 0, \cdots, n$
Z_k	Zustandsmenge (i.e. Menge aller möglichen Zustände) des Systems im Zeitpunkt k
a	Anfangszustand
b	Endzustand
$x_k \in X_k(z_k)$	Entscheidungsvariable zum Zeitpunkt k
$X_k(z_k)$	Menge der zulässigen Entscheidungen zum Zeitpunkt k, kann vom Zustand z_k abhängen
$G_k(z_k, x_k)$	Übergangsfunktion
$r_k(z_k, x_k)$	unmittelbarer Ertrag, wenn im Zeitpunkt k im Zustand z_k die Entscheidung x_k getroffen wird.

Bellman'sches Optimalitätsprinzip:

Sei $(x_0^*, x_1^*, \cdots, x_j^*, \cdots, x_{n-1}^*)$ eine optimale Lösung, die das System vom Anfansgzustand $z_0 = a$ in den Endzustand $z_n = b$ überführt, wobei das Sys-

tem zum Zeitpunkt j den Zustand z_j^* annimmt. Dann gilt:
$(x_j^*, \cdots, x_{n-1}^*)$ ist eine optimale (Teil-)Lösung, die das System vom vorgegebenen Zustand z_j^* in den Endzustand b überführt.
oder mit anderen Worten: eine optimale Lösung hat die Eigenschaft, dass unabhängig vom Anfangzustand und den anfänglichen Entscheidungen die verbleibenden Entscheidungen ausgehend vom aktuellen Zustand optimal sind.

Rückwärtsrekursion

Bezeichnen nun mit $P_k(z_k)$ das Problem, die optimale Lösung zu bestimmen, die Zustand $z_k \in Z_k$ in Zustand $z_n = b$ überführt und mit $F_k^*(z_k)$ den optimalen Zielfunktionalswert von $P_k(z_k)$

- **Start:** Bestimme für jedes der Probleme $P_{n-1}(z_{n-1})$ mit $z_{n-1} \in Z_{n-1}$ die (einzige) Entscheidung x_{n-1}, die z_{n-1} in b überführt. Man erhält: $F_{n-1}^*(z_{n-1}) = r_{n-1}(z_{n-1}, x_{n-1})$
- **Iterationen** $k = n-2, n-3, \cdots, 0$: Bestimme für jedes der Probleme $P_k(z_k)$ mit $z_k \in Z_k$ eine optimale Lösung, die z_k in b überführt, und den optimalen Zielfunktionalswert $F_k^*(z_k)$ mittels

$$F_k^*(z_k) = \min_{x_k \in X_k(z_k)} \{r_k(z_k, x_k) + F_{k+1}^*(z_{k+1} = G_k(z_k, x_k))\}$$

Erweiterungen:

1. Endzustand ist nicht vorgegeben, sondern die Bewertung des Endzustandes geht in das Zielfunktional ein; d.h. der Ausdruck

$$F = \sum_{k=0}^{n-1} r_k(z_k, x_k) + r_n(z_n)$$

   soll minimiert/maximiert werden.

In der Initialisierung wird nun in Stufe $n-1$ für jeden möglichen Zustand z_{n-1} die optimale Entscheidung als Minimierer von

$$r_n(z_n = G_{n-1}(z_{n-1}, x_{n-1})) + r_{n-1}(z_{n-1}, x_{n-1})$$

gewählt und es gilt

$$F^*_{n-1}(z_{n-1}) = \min_{x_{n-1} \in X_{n-1}(z_{n-1})} \{r_n(z_n = G_{n-1}(z_{n-1}, x_{n-1})) + r_{n-1}(z_{n-1}, x_{n-1})\}$$

2. Das Zielfunktional hat keine additive Struktur, sondern es gilt:

$$F = F(r_0(z_0, x_0), r_1(z_1, x_1), \cdots, r_n(z_n))$$

Um das Bellmann'sche Optimalitätsprinzip anwenden zu können, ist die Separabilität von F vorauszusetzen. d.h. es existieren Funktionen φ_k, sodass gilt:

$$\begin{aligned} F &= \varphi_0(r_0(z_0, x_0), F_1(r_1(z_1, x_1), \cdots)) \\ &\vdots \\ F_k &= \varphi_k(r_k(z_k, x_k), F_{k+1}(r_{k+1}(z_{k+1}, x_{k+1}), \cdots)) \end{aligned}$$

wobei das Bellmann-Prinzip nur dann gilt, wenn φ_k für beliebiges aber festes r_k in der zweiten Komponente monoton steigend ist.

3. Bei der **stochastischen dynamischen Optimierung** beschreibt nun die Zufallsvariable $\tilde{\xi}_k$ den stochastischen Einfluss im Zeitpunkt k. Sowohl die Übergangsfunktion als auch die Ertragsfunktion hängen nun von der Realsierung der Zufallsvariable zum Zeitpunkt k ab, i.e. man betrachten nun den Übergang $z_{k+1} = G_k(z_k, x_k, \xi_k)$ und Ertrag $r_k(z_k, x_k, \xi_k)$.

Die Rückwärtsrekursion erfolgt nun in folgenden Schritten:

- **Start:**

$$F^*_n(z_n) = r_n(z_n)$$

- **Iterationen** für $k = n-1, n-2, \cdots, 0$

$$\begin{aligned} F_k^*(z_k) &= \min_{x_k \in X_k(z_k)} F_k(z_k, x_k) = \\ &= \min \mathbb{E}_{\tilde{\xi}_k} \{\varphi_k[r_k(z_k, x_k, \tilde{\xi}_k), F_{k+1}^*(z_{k+1} = G_k(z_k, x_k, \tilde{\xi}_k))]\} \end{aligned}$$

Stochastische dynamische Optimierung:

Bsp: Investitionsproblem

Zum Zeitpunkt 0 befindet sich ein Betrag $S_0 > 1000$ auf Konto B. Dieser Betrag erzielt in der ersten Periode einen sicheren Ertrag von 7 %, sofern er auf Konto B belassen wird, in der zweiten Periode erzielt er auf Konto B einen sicheren Ertrag von 5 %. Der Betrag kann aber zu Beginn jeder Periode (kostenlos) auf ein Konto A übertragen werden. In der ersten Periode wird auf Konto A mit Wahrscheinlichkeit von 50% ein Ertrag von 8 % erzielt, und mit Wahrscheinlichkeit von 50% ein Ertrag von 12 %; in der zweiten Periode beträgt der Ertrag auf Konto A mit jeweils 50% Wahrscheinlichkeit 5% bzw. 9%.

Am Ende jeder Periode fallen auf Konto A Kosten in Höhe von 20 GE an. Am Ende der ersten Periode kann das Geld auf Konto B transferiert werden, wofür 10 GE Kosten anfallen. Am Ende der zweiten Periode muss das Geld (wieder zu Kosten von 10 GE) auf B transferiert werden.

Das Problem kann folgendermaßen mit stochastischer dynamischer Optimierung gelöst werden:

- **Stufe 2**

  $f_2^*(A, S_2)$ bzw. $f_2^*(B, S_2)$ beschreibt die (optimale) Bewertung, wenn in Stufe 2 ein Geldbetrag S_2 auf Konto A bzw. B liegt (bevor er auf Konto B transferiert wird.) Aufgrund der Nutzenfunktion $\log(S - 1000)$ ergibt sich also

$$\begin{aligned} f_2^*(A,S_2) &= \log(S_2-1010) \\ f_2^*(B,S_2) &= \log(S_2-1000) \end{aligned}$$

(Liegt der Betrag auf A, muss noch die Transaktionsgebühr von 10 GE berücksichtigt werden.)

- **Stufe 1**

Ich nehme zunächst den Fall an, dass in Stufe 1 ein Geldbetrag S_1 auf Konto A liegt, und vergleiche den erwarteten Ertrag $f_1(A,S_1,A)$, der sich bei Belassen des Betrages auf Konto A ergibt, mit dem Ertrag $f_1(A,S_1,B)$, der bei Transfer auf Konto B erzielt werden kann.

$$\begin{aligned} f_1(A,S_1,A) &= 0.5[f_2^*(A,\underbrace{S_1\times 1.05-20}_{=S_2})+f_2^*(A,\underbrace{S_1\times 1.09-20}_{=S_2})] = \\ &= 0.5\log[(1.05S_1-1030)(1.09S_1-1030)] \\ f_1(A,S_1,B) &= f_2^*(B,\underbrace{(S_1-10)\times 1.05}_{=S_2}) = \\ &= \log[1.05S_1-1010.5] \end{aligned}$$

Die optimale Bewertung eines Betrags S_1, der in Stufe 1 auf Konto A liegt ergibt sich nun durch

$$\begin{aligned} f_1^*(A,S_1) &= \max\{f_1(A,S_1,A),f_1(A,S_1,B)\} = \\ &= \begin{cases} \log[1.05S_1-1010.5] & \text{falls } S_1<1073 \\ 0.5\log[(1.05S_1-1030)(1.09S_1-1030)] & \text{falls } S_1>1073 \end{cases} \end{aligned}$$

d.h. befindet sich der Betrag S_1 in Stufe 1 auf Konto A und ist er kleiner als 1073 GE, so ist es optimal, ihn nach B zu transferieren, ist er größer als 1073 GE, sollte er auf Konto A gelassen werden.

Analoge Überlegungen müssen nun angestellt werden, für den Fall, dass in Stufe 1 ein Geldbetrag S_1 auf Konto B liegt. Dies liefert:

$$
\begin{aligned}
f_1(B, S_1, A) &= 0.5[f_2^*(A, \underbrace{S_1 \times 1.05 - 20}_{=S_2}) + f_2^*(A, \underbrace{S_1 \times 1.09 - 20}_{=S_2})] = \\
&= 0.5 \log[(1.05S_1 - 1030)(1.09S_1 - 1030)] \\
f_1(B, S_1, B) &= f_2^*(B, \underbrace{S_1 \times 1.05}_{=S_2}) = \\
&= \log[1.05S_1 - 1000]
\end{aligned}
$$

Durch Vergleichen von $f_1(B, S_1, A)$ mit $f_1(B, S_1, B)$ erhält man

$$
\begin{aligned}
f_1^*(B, S_1) &= \max\{f_1(B, S_1, A), f_1(B, S_1, B)\} = \\
&= \begin{cases} \log[1.05S_1 - 1000] & \text{falls } S_1 < 1538 \\ 0.5 \log[(1.05S_1 - 1030)(1.09S_1 - 1030)] & \text{falls } S_1 > 1538 \end{cases}
\end{aligned}
$$

d.h. befindet sich der Betrag S_1 in Stufe 1 auf Konto B und ist er kleiner als 1538 GE, so ist es optimal, ihn auf B zu lassen, ist er größer als 1538 GE, sollte er auf Konto A übertragen werden.

- **Stufe 0**

In Stufe 0 befindet sich der Betrag S_0 auf Konto B. Es müssen daher nur die beiden Entscheidungen, S_0 auf A zu transferieren oder auf B zu lassen, verglichen werden.

Man erhält:

$$
\begin{aligned}
f_0(B, S_0, A) &= 0.5[f_1^*(A, \underbrace{S_0 \times 1.08 - 20}_{=S_1}) + f_1^*(A, \underbrace{S_0 \times 1.12 - 20}_{=S_1})] \\
f_0(B, S_0, B) &= f_1^*(B, \underbrace{S_0 \times 1.07}_{=S_1})
\end{aligned}
$$

sowie

$$
f_0^*(B, S_0) = \max\{f_0(B, S_0, A), f_0(B, S_0, B)\}
$$

Da nun die Gestalt der Funktion $f_1^*(A, S_1)$ bzw. $f_1^*(B, S_1)$ davon abhängt, in welchem Bereich S_1 liegt ($S_1 < 1073$ oder $S_1 > 1073$ bzw. $S_1 < 1538$ oder $S_1 > 1538$) und S_1 in direktem Zusammenhang zu S_0 steht, müssen nun entsprechende Fallunterscheidungen bezüglich S_0 durchgeführt werden.

Dies führt zu folgenden Fällen:

- **Fall 1:** $1000 \leq S_0 \leq 1012.8$

  In diesem Fall ist $S_0 \times 1.08 - 20 < 1073, S_0 \times 1.12 - 20 > 1073$ sowie $S_0 \times 1.07 < 1538$. Daher erhält man

  $$\begin{aligned} f_0(B, S_0, A) &= 0.5\{\log[1.05(S_0 \times 1.08 - 20) - 1010.5] + \\ &+ 0.5 \log[(1.05(S_0 \times 1.12 - 20) - 1030) \times \\ &\times (1.09(S_0 \times 1.12 - 20) - 1030)]\} \\ f_0(B, S_0, B) &= \log[1.05(S_0 \times 1.07) - 1000] \end{aligned}$$

  Im Bereich $1000 \leq S_0 \leq 1012.8$ ist $f_0(B, S_0, B) > f_0(B, S_0, A)$ und daher ist in Stufe 0 die Entscheidung, Konto B zu wählen, besser und es gilt:

  $$f_0^*(B, S_0) = \log[1.1235 S_0 - 1000]$$

- **Fall 2:** $1012.8 < S_0 \leq 1437$

  In diesem Fall ist $S_0 \times 1.08 - 20 > 1073, S_0 \times 1.12 - 20 > 1073$ sowie $S_0 \times 1.07 < 1538$. Daher erhält man

  $$\begin{aligned} f_0(B, S_0, A) &= 0.5\{0.5 \log[(1.05(S_0 \times 1.08 - 20) - 1030) \times \\ &\times (1.09(S_0 \times 1.08 - 20) - 1030)] + \\ &+ 0.5 \log[(1.05(S_0 \times 1.12 - 20) - 1030) \times \\ &\times (1.09(S_0 \times 1.12 - 20) - 1030)]\} \\ f_0(B, S_0, B) &= \log[1.05(S_0 \times 1.07) - 1000] \end{aligned}$$

Der Vergleich von $f_0(B, S_0, A)$ mit $f_0(B, S_0, B)$ liefert

$$f_0^*(B, S_0) = \begin{cases} f_0(B, S_0, B) & \text{für} \quad 1012.8 \leq S_0 \leq 1022 \\ f_0(B, S_0, A) & \text{für} \quad 1022 \leq S_0 \leq 1437 \end{cases}$$

– **Fall 3:** $1437 < S_0$

In diesem Fall ist $S_0 \times 1.08 - 20 > 1073, S_0 \times 1.12 - 20 > 1073$ sowie $S_0 \times 1.07 > 1538$. Daher erhält man

$$\begin{aligned} f_0(B, S_0, A) &= \text{ wie im Fall 2} \\ f_0(B, S_0, B) &= 0.5 \log[(1.05(S_0 \times 1.07) - 1030)(1.09(S_0 \times 1.07) - 1030)] \end{aligned}$$

Im Bereich $1437 \leq S_0$ ist stets $f_0(B, S_0, A) > f_0(B, S_0, B)$. Daher ist in Stufe 1 die Wahl von Konto A optimal und es gilt $f_0^*(B, S_0) = f_0(B, S_0, A)$

Mehrstufige stochastische Probleme

1. **stochastische Entscheidungsbäume**

   Verzweigungen treten für jedes x_t bzw. $\tilde{\zeta}_t$ auf

   - Zustand z_t kann stetig oder diskret sein
   - Entscheidungen x_t sind diskret
   - Zufallsvariable $\tilde{\zeta}_t$ sind diskret

2. **stochastische dynamische Optimierung**

   Entscheidung für jeden möglichen Zustand z_t

   - endliche Anzahl von Zuständen vorteilhaft, aber auch stetiger Zustandsraum möglich

- Entscheidungen x_t sind stetig oder diskret
- Zufallsvariable $\tilde{\zeta}_t$ sind stetig oder diskret

3. **Ereignisbäume** Verzweigung bei jeder Realisierung der Zufallsvariablen $\tilde{\zeta}_t$

    - Zufallsvariable $\tilde{\zeta}_t$ sind diskret
    - Zustand z_t kann stetig oder diskret sein
    - Entscheidungen x_t sind stetig

Szenarienaggregation

Betrachten ein Problem über T Zeitperioden $t = 0, 1, \cdots, T$ wobei in jeder Stufe die Systemdynamik von der Zufallsvariablen $\tilde{\zeta}_t$ abhängt.

Def: Unter einem **Szenario** versteht man eine Abfolge von Realisierungen der Zufallsvariablen $\tilde{\zeta}_t, t = 0, \cdots T$.

$$s = (\zeta_0^s, \zeta_1^s, \cdots, \zeta_T^s) \quad \cdots \text{Szenario } s$$

Sei $\mathcal{S}$ die Menge aller möglicher Szenarien.

Möglichkeit 1:

L öse für jedes Szenario $s \in \mathcal{S}$:

$$\min \sum_{t=0}^{T} \alpha^t r_t(z_t, x_t, \zeta_t^s) + \alpha^{T+1} Q(z_{T+1})$$

$$\text{s.t. } z_{t+1} = G_t(z_t, x_t, \zeta_t^s), \quad A_t(z_t) \leq x_t \leq B_t(z_t) \quad t = 0, \cdots, T$$

wobei z_0 gegeben sei.

Für jedes Szenario bekommt man eine Lösung $x^s = (x_0^s, x_1^s, \cdots, x_T^s)$.

Ist es sinnvoll nun als Lösung

$$\underline{\mathrm{x}}_t = \sum_{s \in \mathcal{S}} p^s x_t^s$$

heranzuziehen, wobei p^s die Wahrscheinlichkeit von Szenario s angibt?

NEIN!!

- $\underline{\mathrm{x}}_t$ ist möglicherweise nicht zulässig
- Selbst wenn $\underline{\mathrm{x}}_t$ zulässig ist ist es wohl kaum optimal

Auf folgende Weise kann eine implementierbare Lösung bestimmt werden:

Sei für jede Periode t die Menge $\{s\}_t$ gegeben durch alle Szenarien s die bis zum Zeitpunkt t übereinstimmen, i.e.

$$\{s\}_t = \{s|\zeta_0^s, \cdots, \zeta_t^s \text{ stimmen überein}\}.$$

Sind nun für die einzelnen Szenarien die optimalen L ösungen bekannt, kann durch Mittelung eine zulässige Lösung berechnet werden

$$\underline{\mathrm{x}}(\{s\}_t) = \sum_{s' \in \{s\}_t} \frac{p^{s'} x_t^{s'}}{p(\{s\}_t)}$$

Diese Lösung ist zulässig, aber i.A. nicht optimal.

Bestimmung der optimalen Lösung:

$$\min \sum_{s \in \mathcal{S}} p^s \left(\sum_{t=0}^{T} \alpha^t r_t(z_t^s, x_t^s, \zeta_t^s) + \alpha^{T+1} Q(z_{T+1}^s) \right)$$

$$\text{s.t. } z_{t+1}^s = G_t(z_t^s, x_t^s, \zeta_t^s), \quad A_t(z_t^s) \le x_t^s \le B_t(z_t^s) \quad t = 0, \cdots, T$$

und der Implementierbarkeitsbedingung

$$x_t^s = \sum_{s' \in \{s\}_t} \frac{p^{s'} x_t^{s'}}{p(\{s\}_t)} \qquad \text{für alle } t = 0, \cdots, T, \text{ und alle Szenarien } s$$

Lagrange-Methode:

$$\min \sum_{s \in \mathcal{S}} p^s \left(\sum_{t=0}^{T} \alpha^t \left[r_t(z_t^s, x_t^s, \zeta_t^s) + w_t^s \left(x_t^s - \sum_{s' \in \{s\}_t} \frac{p^{s'} x_t^{s'}}{p(\{s\}_t)} \right) \right] + \alpha^{T+1} Q(z_{T+1}) \right)$$

Ersetze

$$\sum_{s' \in \{s\}_t} \frac{p^{s'} x_t^{s'}}{p(\{s\}_t)}$$

durch das Mittel der vorhergegangenen Iteration

$$\underline{\mathrm{x}}(\{s\}_t) = \sum_{s' \in \{s\}_t} \frac{p^{s\prime} x_t^{s\prime}}{p(\{s\}_t)}$$

Man erhält also

$$\min \sum_{s \in \mathcal{S}} p^s \left(\sum_{t=0}^{T} \alpha^t \left[r_t(z_t^s, x_t^s, \zeta_t^s) + + w_t^s \left(x_t^s - \underline{\mathrm{x}}(\{s\}_t) \right) \right] + \alpha^{T+1} Q(z_{T+1}) \right)$$

augmented Lagrangian method

$$\min \sum_{s \in \mathcal{S}} p^s \left(\sum_{t=0}^{T} \alpha^t \left[r_t(z_t^s, x_t^s, \zeta_t^s) + + w_t^s x_t^s + \frac{\rho}{2} [x_t^s - \underline{\mathrm{x}}(\{s\}_t)]^2 \right] + \alpha^{T+1} Q(z_{T+1}^s) \right)$$

Algorithmus:

1. setze $w_t^s := 0 \qquad \forall s, t$
2. bestimme anfngliches $\underline{\mathrm{x}}(\{s\}_t)$
3. setze $\rho > 0$
4. Löse für alle Szenarien

$$\min \sum_{t=0}^{T} \alpha^t r_t(z_t, x_t, \zeta_t^s) + w_t^s + \frac{\rho}{2}(x_t - \underline{\mathrm{x}}(\{s\}_t))^2 + \alpha^{T+1} Q(z_{T+1})$$
$$\text{s.t. } z_{t+1} = G_t(z_t, x_t, \zeta_t^s), \quad A_t(z_t) \leq x_t \leq B_t(z_t) \quad t = 0, \cdots, T$$

   und erhalte damit x^s, z^s

5. berechne

$$\underline{\mathrm{x}}(\{s\}_t) = \sum_{s' \in \{s\}_t} \frac{p^{s\prime} x_t^{s\prime}}{p(\{s\}_t)}$$

6. aktualisiere ρ falls nötig
7. berechne

$$w_t^s := w_t^s + \rho(x_t - \underline{\mathrm{x}}(\{s\}_t))$$

8. Wiederhole Schritte 4 - 7 bis Ergebnis hinreichend gut.

Szenarienaggregation

Anwendungsbeispiel

An einem Fluss liegen zwei Wasserreservoirs A und B, die zur Stromerzeugung dienen.

Variable:

- $z_{ij} \cdots$ Wassermenge in Reservoir $i, (i \in \{A, B\})$ zu Beginn von Periode $j, (j \in \{1, 2, \cdots, T\})$. (Zustand)
- $x_{ij} \cdots$ Wassermenge, die während Periode j zur Stromerzeugung aus Reservoir i entnommen wird. (Entscheidungsvariable)
- $r_{ij} \cdots$ Wassermenge, die während Periode j aus Reservoir i abgelassen wird, jedoch nicht zu Stromerzeugung verwendet wird. (Entscheidungsvariable)
- $g_{ij} \cdots$Zufluss in Reservoir i während Periode j. (Zufallsvariable)

Unter der Annahme, dass aus Reservoir A abgelassenes Wasser in derselben Periode Reservoir B erreicht, ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} z_{Aj+1} &= z_{Aj} + g_{Aj} - x_{Aj} - r_{Aj} \\ z_{Bj+1} &= z_{Bj} + g_{Bj} + x_{Aj} + r_{Aj} - x_{Bj} - r_{Bj} \end{aligned}$$

Weiters gibt es folgende Restriktionen: $x_{ij} \in [\underline{x}_i, \bar{x}_i]$ und $z_{ij} \in [\underline{z}_i, \bar{z}_i]$.

Ziel ist es, den Ertrag aus der Stromproduktion zu maximieren

$$\sum_{i=1}^{T} p_j(u_{Aj} + u_{Bj}) + Q_{T+1}(z_{AT+1}, z_{BT+1})$$

Energiemanagementsysteme für hydro-thermische Kraftwerksyteme

Eigenschaften:

- hochdimensional
- mehrstufig
- stochastisch: z.B. Strompreise, Last, Wasserzuflüsse, etc. modelliert durch Szenarienbäume
- gemischt-ganzzahlig
- dienen zur simultanen Planung von Stromerzeugung und Stromhandel

Generierung/Reduktion von Szenarienbäumen

Zerlege Optimierungszeitraum in T Zeitintervalle.
$\Rightarrow$ statistischen, multivariaten Datenprozess $\tilde{\zeta} = \{\tilde{\zeta}_z\}_{t=1}^T, \quad \zeta_t \in \mathbb{R}^m$. Die Komponenten von ζ_t beschreiben etwa Lat, Reserveleistung, Wasserzuflüsse, Preise, etc.

Approximiere $\tilde{\zeta}$ durch endliche Anzahl von Realisierungen (Szenarien) $\zeta^s = \{\zeta_t^s\}_{t=1}^T$mit zugehörigen Wahrscheinlichkeiten π^s.

methodischer Ansatz zur Generierung von Szenarienbäumen:

(1) Erzeugung von Szenarien des Datenprozesses $\tilde{\zeta}$

(2) Konstruktion von Szenarienbäumen aus Datenprozess

(3) Reduktion der Szenarienbäume

ad (1)&(2) Approximation von ζ durch endlich viele Pfade $\{\zeta^s\}_{s=1}^S$ mit Wahrscheinlichkeiten $\{\pi^s\}_{s=1}^S$ mit gleichem (deterministischen) Anfangszustand durch

- historische Daten
- Expertenszenarien
- Simulation statistischer Modelle

ad (3) Reduktion der Szenarienbäume (siehe etwa W. Römisch, Berlin)

- möglichst viele Szenarien entfernen
- Approximationsgenauigkeit des neuen Szenarienbaums soll sich höchstens um vorgegebene Toleranz verschlechtern

Dekomposition des Energiemanagementmodells in Teilprobleme

1. Stromhandel an Strombörse
2. Teilproblem der optimalen Stromerzeugung mittels thermischer Einheiten
3. Teilproblem des optimalen Einsatzes von Pumpspeicheranlagen

(1) und (2) werden etwa durch stochastische dynamische Optimierung gelöst, Problem (3) hat eine Netzwerkfluss-Struktur. (3) kann als lineares Minimum-Cost-Flow Problem (gegebenenfalls mit stochastischen Erweiterungen) formuliert und gelöst werden.

Bedeutung von Pump-Speicherkraftwerken:

- Energiereserve für auftretende Lastspitzen
- flexible Optimierung der Stromerzeugung in Zeiträumen hoher bzw. niedriger

Strompreise	Strom billig	$\Rightarrow$	kaufe Energie oder erzeuge Strom im therm. KW	$\Rightarrow$	pumpe Wasser ins O
	Strom teuer	$\Rightarrow$	erzeuge Strom durch Pumpspeicherkraftwerk	$\Rightarrow$	verkaufe zu hohem P

- Entkoppelung von Zufluss und Erzeugung (im Gegensatz zu Laufkraftwerken)

Diskretisiere Zeitraum in Stunden/Tages/Wochenintervalle.

Bestimme in jedem Zeitpunkt Pump- bzw- Turbinenleistung

$$
\begin{aligned}
T &\cdots \text{ Anzahl der Zeitperioden}\\
w^t/v^t &\cdots \text{ Pump-/ Turbinenleistung}\\
l^t &\cdots \text{ Füllstand des Oberbeckens}\\
s^t &\cdots \text{ Zufluss in das Oberbecken}\\
\lambda^t &\cdots \text{ Kostenkoeffizient}\\
\eta &\cdots \text{ Wirkungsgrad}\\
l^{in}/l^{end} &\cdots \text{ Anfangs-/ Endfüllstand}
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ lineares Optimierungsproblem

$$
\begin{aligned}
\min \; \textstyle\sum_{t=1}^{T} & \; \lambda^t(w^t - v^t)\\
l^t &= l^{t-1} + \eta w^t - v^t + s^t\\
w^{min} &\leq w^t \leq w^{max}\\
v^{min} &\leq v^t \leq v^{max}\\
l^{min} &\leq l^t \leq l^{max}\\
l^0 &= l^{in}\\
l^T &= l^{end}
\end{aligned}
$$

Zusammenfügen der Zeitperioden $\Rightarrow$ Netzwerkflussproblem.

Nichtlineare Optimierung:

Numerische Verfahren

Probleme mit einer Variablen

Methode des goldenen Schnittes

Teile ein Intervall der Länge Δ in zwei Teilintervalle der Länge δ und $\Delta-\delta$ sodass sich δ zu $\Delta-\delta$ genauso verhält wie $\Delta-\delta$ zu Δ, i.e.

$$\frac{\delta}{\Delta-\delta} = \frac{\Delta-\delta}{\Delta} \quad \Rightarrow \delta = 0.382, \Delta = 0.618$$

Voraussetzung: Gegeben sei eine konkave Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die in einem Intervall $[a_1, b_1]$ der Länge Δ eine Maximalstelle besitzt. Setze $\delta = 0.382$ und wähle eine Abbruchschranke $\epsilon > 0$.

Algorithmus:

1. Initialisierung: Berechne $\lambda_1 := a_1 + \delta(b_1 - a_1)$, und $\mu_1 = a_1 + (1-\delta)(b_1 - a_1)$ sowie $f(\lambda_1)$ und $f(\mu_1)$.

2. Iteration $k = 1, 2 \cdots$

   (a) Falls $b_k - a_k < \epsilon \quad \Rightarrow$ Abbruch. Die Maximalstelle liegt im Intervall $[a_k, b_k]$. Der größte bekannte Wert in diesem Intervall ist Näherung für das Maximum.

   (b) Falls $f(\lambda_k) < f(\mu_k)$, setze $a_{k+1} := \lambda_k, b_{k+1} := b_k, \lambda_{k+1} := \mu_k, f(\lambda_{k+1}) = f(\mu_k)$ und berechne

   $$\mu_{k+1} := a_{k+1} + (1-\delta)(b_{k+1} - a_{k+1}), \text{ sowie } f(\mu_{k+1})$$

   (c) Falls $f(\lambda_k) \geq f(\mu_k)$, setze $a_{k+1} := a_k, b_{k+1} := \mu_k, \mu_{k+1} := \lambda_k, f(\mu_{k+1} = f(\lambda_k)$ und berechne

   $$\lambda_{k+1} := a_{k+1} + \delta(b_{k+1} - a_{k+1}), \text{ sowie } f(\lambda_{k+1})$$

Probleme mit mehreren Variablen

Gradientenverfahren:

Voraussetzung: Gegeben sei eine stetig differenzierbare, konkave Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, sowie eine Abbruchschranke $\epsilon > 0$.

Algorithmus:

1. Initialisierung: Wähle einen zulässigen Punkt $\vec{x}_{(0)}$.

2. Iteration $k = 0, 1, 2 \cdots$

   (a) Berechne den Gradienten $\nabla f(\vec{x}_{(k)}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} |_{\vec{x}=\vec{x}_{(k)}} \right)$

   Falls $\|\nabla f(\vec{x}_{(k)})\| < \epsilon \Rightarrow$ Abbruch.

   Falls $\nabla f(\vec{x}_{(k)}) = 0$, so ist $\vec{x}_{(k)}$ Maximalstelle von f, falls $\nabla f(\vec{x}_{(k)}) \neq 0$, so ist $\vec{x}_{(k)}$ eine Näherung für eine Maximalstelle.

   (b) Betrachte nun die Funktion

   $$H(\lambda) := f\left(\vec{x}_{(k)} + \lambda \nabla f(\vec{x}_{(k)})\right)$$

   und berechne das λ^* so, dass $H(\lambda)$ maximal ist.

   (c) setze

   $$\vec{x}_{(k+1)} := \vec{x}_{(k)} + \lambda^* \nabla f\left(\vec{x}_{(k)}\right)$$

Methode des steilsten Anstiegs

Gegeben sei folgendes Problem: Maximiere eine konkave, differenzierbare Funktion f,

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, unter den linearen Nebenbedingungen $A\vec{x} \leq \vec{b}$, $\quad A \cdots [m \times n]-$Matrix.

Die m Nebenbedingungen sind also von der Form $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, \cdots m$.

(Die Nebenbedingungen sollen auch gegebenenfalls Nichtnegativitätsbedingungen beinhalten.)

Def.:

1. $X = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax \leq b\}$ sei die Menge der zulässigen Lösungen.

2. Sei $\vec{x} \in X$. $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$ heißt zulässige Richtung im Punkt $\vec{x}$, falls ein $\bar{\lambda}(\vec{h}) > 0$ existiert, sodass $\vec{x} + \lambda\vec{h} \in X$ für alle $\lambda \in [0, \bar{\lambda}(\vec{h}))$ gilt.

3. Die Nebenbedingung i heißt aktiv, falls $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i$

4. Unter dem Kegel der zulässigen Richtungen im Punkt $\vec{x}$ versteht man die Menge

   $K(\vec{x}) = \{\vec{h} \in \mathbb{R}^n | -1 \leq h_j \leq 1, \underbrace{\sum_{j=1}^n a_{ij}h_j}_{(A\vec{h})_i} \leq 0, \text{ sofern } \underbrace{\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j}_{=(A\vec{x})_i} = b_i (\text{i.e. falls NB } i \text{ aktiv}$

5. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$ eine "Richtung."

   $$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x})h_i = (\nabla f(\vec{x}))^t \, \vec{h}$$

   bezeichnet man als "Richtungsableitung" der Funktion f an der Stelle $\vec{x}$ in Richtung $\vec{h}$. Sie gibt die infinitesimale Änderung der Funktion entlang der Geraden $\vec{x} + \lambda\vec{h}$ an.

Algorithmus: wähle kleines $\epsilon > 0$ (Abbruchschranke)

1. Initialisierung: Setze $k = 0$, wähle Startwert $\vec{x}^{(0)}$

2. Berechne den Gradient der Funktion f an der Stelle $\vec{x}^{(k)}$, i.e. $\nabla f(\vec{x}^{(k)})$.

   Falls $\nabla f(\vec{x}^{(k)}) = 0 \quad \Rightarrow$ Abbruch, fertig.

   Sonst

3. Bestimme den Kegel der zulässigen Richtungen $K(\vec{x}^{(k)})$

   Löse folgendes lineares Optimierungsproblem:

$$\max \left(\nabla f(\vec{x}^{(k)})\right)^t h$$

   unter der Nebenbedingung: $\vec{h} \in K(\vec{x}^{(k)})$. Dies liefert als Lösung $\tilde{h}$. Falls $\left(\nabla f(\vec{x}^{(k)})\right)^t \vec{h} \leq 0 \quad \Rightarrow$Abbruch.

   Sonst

4. Bestimme

$$\tilde{\lambda} = \text{argmax } \left\{ f(\vec{x}^{(k)} + \lambda\tilde{h}) | \underbrace{A(\vec{x}^{(k)} + \lambda\tilde{\vec{h}}) \leq \vec{b}}_{(*)}, \lambda \geq 0 \right\}$$

   Die obige Nebenbedingung $(*)$ bedeutet:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} + \lambda \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\tilde{h}_j \leq b_i \text{für alle } i \text{ mit } \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\tilde{h}_j > 0$$

   (Dies kann nur eintreten, falls NB i nicht aktiv war.)

$$\Rightarrow 0 < \lambda \leq \frac{b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}}{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\tilde{h}_j}$$

5. Setze $\vec{x}^{(i+1)} = \vec{x}^{(i)} + \tilde{\lambda}\tilde{\vec{h}}$

   Ist $\|\vec{x}^{(i+1)} - \vec{x}^{(i)}\| < \epsilon \quad \Rightarrow$ fertig, ansonst setze $i = i + 1$ und gehe zu Schritt 2.

Bsp:

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) = 5x_1 - x_1^2 + 5x_2 - x_2^2 &\rightarrow \max \\ x_1 + 2x_2 &\leq 8 \\ 3x_1 + x_2 &\leq 9 \\ -x_1 &\leq 0 \\ -x_2 &\leq 0 \end{aligned}$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 5 - 2x1 \\ 5 - 2x_2 \end{pmatrix}$$

- $\vec{x}^{(0)} = (0,0)^t$.

$$A\vec{h} = \begin{pmatrix} h_1 + 2h_2 & \leq & 8 \\ 3h_1 + h_2 & \leq & 9 \\ -h_1 & \leq & 0 \\ -h_2 & \leq & 0 \end{pmatrix}$$

  Da Nebenbedingungen 3 und 4 aktiv sind, bekommt man
  $K(x^{(0)}) = \{\vec{h} \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq h_i \leq 1\}$.

- Maximiere $\nabla f(x^{(0)})^t \vec{h} = 5h_1 + 5h_2$ unter der Nebenbedingung $0 \leq h_i \leq 1$.
  $\Rightarrow \tilde{h} = (1,1)^t$.

- Die Nebenbedingung $A(\vec{x}^{(0)} + \lambda\tilde{\vec{h}}) \leq \vec{b}$ reduziert sich zu $\begin{pmatrix} 3\lambda \\ 4\lambda \\ -\lambda \\ -\lambda \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

  und $f(\vec{x}^{(0)} + \lambda\tilde{\vec{h}}) = -2\lambda^2 + 10\lambda$. Daher erhält man

$$\tilde{\lambda} = \text{argmax } \{-2\lambda^2 + 10\lambda | 0 \leq \lambda \leq 2.25\} = 2.25.$$

  Daher erreicht man den Punkt $\vec{x}^{(1)} = (2.25, 2.25)^t$.

- Am Punkt $\vec{x}^{(1)}$ ist Nebenbedingung 2 aktiv. Daher ist
  $K(\vec{x}^{(1)}) = \{\vec{h} \in \mathbb{R}^2 | 3h_1 + h_2 \leq 0, -1 \leq h_i \leq 1\}$.

- $\nabla f(\vec{x}^{(1)}) = (0.5, 0.5)^t$. Daher maximiert man $0.5h_1 + 0.5h_2$ unter den Nebenbedingungen $3h_1 + h_2 \leq 0, -1 \leq h_i \leq 1$ und erhält $\tilde{h} = (-1/3, 1)^t$.

- $f(\vec{x}^{(1)} + \lambda\tilde{h}) = 12.375 + \lambda/3 - 10\lambda^2/9$. Die Nebenbedingungen ergeben sich zu $\begin{pmatrix} 6.75 + 5\lambda/3 \\ 9 \\ -2.25 + \lambda/3 \\ -2.25 - \lambda \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ also $0 \leq \lambda \leq 0.75$.

  Maximieren ergibt $\tilde{\lambda} = 0.15$ und daher $\vec{x}^{(2)} = (2.2, 2.4)^t$.

- $\nabla f(\vec{x}^{(2)}) = (0.6, 0.2)^t$. Da noch immer nur NB 2 aktiv ist, gilt $K(\vec{x}^{(2)}) = K(\vec{x}^{(1)})$. Als Optimierungsproblem hat man also: maximiere $0.6h_1 + 0.2h_2$ unter der Nebenbedingung $3h_1 + h_2 \leq 0, -1 \leq h_i \leq 1$. Dies liefert offensichtlich $h_1 = h_2 = 0$ und damit liegt die optimale Lösung bei $(2.2, 2.4)$.

Quotienten-optimierung

$$\max \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{z.B. } \max \frac{\text{Erwartungswert}}{\text{Standardabweichung}} \approx \max \frac{\text{Ertrag}}{\text{Risiko}} \quad \text{oder } \min \frac{\text{Umweltverschmutz}}{\text{produzierter Stückz}}$$

Unter gewissen Voraussetzungen kann dies in ein lineares Problem transformiert werden.

$$\max_x \frac{\vec{c}^t\vec{x} + c_0}{\vec{d}^t\vec{x} + d_0} \quad \text{unter den NB } A\vec{x} \leq \vec{b}, \quad \vec{x} \geq \vec{0} \tag{4}$$

Variablentransformation:

$$\vec{y} := \frac{\vec{x}}{\vec{d}^t\vec{x} + d_0}, \quad t := \frac{1}{\vec{d}^t\vec{x} + d_0} \Rightarrow \vec{x} = \vec{y}\frac{1}{t}$$

Für das Zielfunktional erhält man dann

$$\frac{\vec{c}^t\vec{x} + c_0}{\vec{d}^t\vec{x} + d_0} = t\left(\vec{c}^t\vec{y}\frac{1}{t} + c_0\right) = \vec{c}^t\vec{y} + c_0 t$$

und für die Nebenbedingungen:

$$A\vec{x} \le \vec{b} \Rightarrow A\vec{y}\frac{1}{t} \le \vec{b} \Rightarrow A\vec{y} - t\vec{b} \le 0$$

Die 'neuen' Variablen $\vec{y}$ und t können jedoch nicht unabhängig voneinander gewählt werden.

$$t = \frac{1}{\vec{d}^t\vec{x} + d_0} \Rightarrow \vec{d}^t\vec{x}t + d_0t = 1 \Rightarrow \vec{d}^t\vec{y} + d_0t = 1$$

Problem (4) ist daher äquivalent zum linearen Optimierungsproblem

$$\max_{\vec{y},t} \vec{c}^t\vec{y} + c_0t, \text{ NB:} A\vec{y} - t\vec{b} \le 0, \quad \vec{d}^t\vec{y} + d_0t = 1$$

Quadratische Optimierung

$$\begin{array}{rrcl} \text{Maximiere} & F(\vec{x}) & = & \vec{c}^t\vec{x} - \frac{1}{2}\vec{x}^tQ\vec{x} \\ \text{unter den} & A\vec{x} & \le & \vec{b} \\ \text{Nebenbedingungen} & \vec{x} & \ge & \vec{0} \end{array}$$

Dabei ist Q eine symmetrische, positiv definite $[n\times n]-$Matrix, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{b} \in \mathbb{R}^m$, A eine $[m \times n]-$Matrix.

Anwenden des Kuhn-Tucker Theorems liefert folgende Lagrangefunktion mit den folgenden notwendigen und hinreichenden Optimalitäts-Bedingungen:

$$L(\vec{x}, \vec{u}) = \vec{c}^t\vec{x} - \frac{1}{2}\vec{x}^tQ\vec{x} - \vec{u}^t(A\vec{x} - \vec{b})$$

1. $L_x \le \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{c} - Q\vec{x} - A^t\vec{u} \le \vec{0}$
2. $\vec{x}^tL_x = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{x}(\vec{c} - Q\vec{x} - A^t\vec{u}) = 0$
3. $L_u \le \vec{0} \quad \Rightarrow \quad A\vec{x} - \vec{b} \le \vec{0}$
4. $\vec{u}L_u = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{u}^t(A\vec{x} - \vec{b}) = 0$

5. $\vec{x} \geq \vec{0}$

6. $\vec{u} \geq \vec{0}$

Durch Einfügen von Schlupfvariablen $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ sowie $\vec{v} \in R^m$ können die Ungleichungen in 1 und 4 auf Gleichungsform gebracht werden:

1. $L_x \leq \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{c} - Q\vec{x} - A^t\vec{u} \leq \vec{0} \quad \Rightarrow \quad Q\vec{x} + A^t\vec{u} - \vec{y} = \vec{c}$

2. $\vec{x}^t L_x = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{x}^t \underbrace{(\vec{c} - Q\vec{x} - A^t\vec{u})}_{=-\vec{y}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{x}^t\vec{y} = 0$

3. $L_u \leq \vec{0} \quad \Rightarrow \quad A\vec{x} - \vec{b} \leq \vec{0} \quad \Rightarrow \quad A\vec{x} + \vec{v} = \vec{b}$

4. $\vec{u}L_u = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{u}^t \underbrace{(A\vec{x} - \vec{b})}_{=-\vec{v}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{u}^t\vec{v} = 0$

5. $\vec{x} \geq \vec{0}, \qquad \vec{y} \geq \vec{0}$

6. $\vec{u} \geq \vec{0}, \qquad \vec{u} \geq \vec{0}$

Da $\vec{x}^t\vec{y} = 0$ und $\vec{u}^t\vec{v} = 0$ gilt aufgrund der Nichtnegativitätsbedingung:

$$x_i = 0 \text{ oder } y_i = 0, \forall i = 1, \cdots, n$$

d.h. x_i und y_i dürfen nicht gleichzeitig Basisvariable sein, und analog

$$u_j = 0 \text{ oder } v_j = 0, \forall j = 1, \cdots, m$$

d.h. u_j und v_j dürfen nicht gleichzeitig Basisvariable sein.

==

Ableiten von quadratischen Formen:

$\vec{x}^tQ\vec{x}$ beschreibt die quadratische Form $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ij}x_ix_j$.

Bsp: Für $Q = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ erhält man $\vec{x}^tQ\vec{x} = 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2$.

Ableiten der quadratischen Form nach x_k liefert

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_{ij}x_ix_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_{ij}\frac{\partial(x_ix_j)}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_{ij}\left(x_j\frac{\partial x_i}{\partial x_k} + x_i\frac{\partial x_j}{\partial x_k}\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_{ij}x_j\frac{\partial x_i}{\partial x_k}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=}$$

$$\text{Da } \frac{\partial x_i}{\partial x_k} = \begin{cases} 1 \text{ falls } i = k \\ 0 \text{ falls } i \neq k \end{cases}$$

vereinfachen sich die Doppelsummen erheblich und man erhält

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_{ij}x_j\frac{\partial x_i}{\partial x_k}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_{ij}x_i\frac{\partial x_j}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^{n} q_{kj}x_j+\sum_{i=1}^{n} \underbrace{q_{ik}}_{=q_{ki}} x_i = \sum_{j=1}^{n} q_{kj}x_j+\sum_{i=1}^{n} q_{ki}x_i = 2\sum_{j=1}^{n} q_{kj}x_j = 2$$

Dabei geht die Symmetrie von Q ein. Weiters kann der Summationsindex in der zweiten Summe von i auf j umbenannt werden.

==

Algorithmus von Wolfe

Schritt 1: Formuliere für das Problem die Kuhn-Tucker Bedingungen.

Schritt 2: Transformiere alle in Schritt 1 entstandenen Ungleichungen in Gleichungen durch Hinzufügen von Schlupfvariablen. Kann unmittelbar eine zulässige Basislösung abgelesen werden, so ist das Verfahren beendet. Anderenfalls:

Schritt 3: Füge, wo notwendig, dem Gleichungssystem künstliche Variable z_i hinzu, um eine zulässige Basislösung zu ermitteln. Das Zielfunktional enthält lediglich Strafkosten für die z_i.

Schritt 4: Iteriere mit der $M-$Methode bis eine zulässige Basislösung erreicht ist oder feststeht, dass der Lösungsraum leer ist.

Bsp:

maximiere $5x_1 + 5x_2 - x_1^2 - x_2^2$ unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 8 \\ 3x_1 + x_2 &\leq 9 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Dies entspricht obigem Modell mit

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Als Lagrange-funktion bekommt man

$$L(\vec{x}, \vec{u}) = 5x_1 + 5x_2 - x_1^2 - x_2^2 - u_1(x_1 + 2x_2 - 8) - u_2(3x_1 + x_2 - 9)$$

Die hinreichenden Bedingungen aus dem Kuhn-Tucker Theorem lauten

$$(1) \quad L_x \leq \vec{0}: \quad \begin{aligned} 5 - 2x_1 - u_1 - 3u_2 &\leq 0 \\ 5 - 2x_2 - 2u_1 - u_2 &\leq 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \text{I} \;\; 2x_1 + u_1 + 3u_2 - y_1 &= 5 \\ \text{II} \;\; 2x_2 + 2u_1 + u_2 - y_2 &= 5 \end{aligned}$$

$$(3) \quad L_u \geq \vec{0} \quad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 8 &\leq 0 \\ 3x_1 + x_2 - 9 &\leq 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \text{III} \;\; x_1 + 2x_2 + v_1 &= 8 \\ \text{IV} \;\; 3x_1 + x_2 + v_2 &= 9 \end{aligned}$$

Um eine zulässige Basislösung als Startlösung zu erhalten, müssen in I und II nun künstliche Variable z_1, z_2 hinzugefügt werden, die in einem zu mnaximierenden Zielfunktional stark negativ bewertet werden:

$$\begin{aligned} \text{I} \;\; 2x_1 + u_1 + 3u_2 - y_1 + z_1 &= 5 \\ \text{II} \;\; 2x_2 + 2u_1 + u_2 - y_2 + z_2 &= 5 \end{aligned}$$

Basisvariable: v_1, v_2, z_1, z_2

Zielfunktional: max $ZF = -Mz_1 - Mz_2$

Da die Basisvariablen im Zielfunktional nicht auftreten dürfen, ersetze ich $z_1 = 5 - 2x_1 - u_1 - 3u_2 + y_1$ (aus Gleichung I) sowie $z_2 = 5 - 2x_2 - 2u_1 - u_2 + y_2$ aus Geichung II und erhalte

$ZF - 2Mx_1 - 2Mx_2 - 3Mu_1 - 4Mu_2 + My_1 + My_2 = -10M$

BV		x_1	x_2	u_1	u_2	y_1	y_2	v_1	v_2	z_1	z_2	rS	Q
	ZF	$-2M$	$-2M$	$-3M$	$-4M$	M	M	0	0	0	0	$-10M$	
z_1	I	2	0	1	3	-1	0	0	0	1	0	5	2.5
z_2	II	0	2	2	1	0	-1	0	0	0	1	5	–
v_1	III	1	2	0	0	0	0	1	0	0	0	8	8
v_2	IV	3	1	0	0	0	0	0	1	0	0	9	3

u_1 und v_1 bzw. u_2 und v_2 dürfen nicht gleichzeitig Basisvariable sein. Nehme daher x_1 in die Basis

		x_1	x_2	u_1	u_2	y_1	y_2	v_1	v_2	z_1	z_2	rS	Q
BV	$ZF + MI$	0	$-2M$	$-2M$	$-M$	0	M	0	0	M	0	$-5M$	
x_1	$I/2$	1	0	$1/2$	$3/2$	$-1/2$	0	0	0	$1/2$	0	$5/2$	–
z_2	II	0	2	2	1	0	-1	0	0	0	1	5	2.5
v_1	$III - I/2$	0	2	$-1/2$	$-3/2$	$1/2$	0	1	0	$-1/2$	0	$11/2$	2.25
v_2	$IV - 3I/2$	0	1	$-3/2$	$-9/2$	$3/2$	0	0	1	$-3/2$	0	$3/2$	1.5

Nehme nun x_2 in die Basis (u_1 darf nicht in die Basis genommen werden), v_2 verlässt die Basis und erhalte

BV		x_1	x_2	u_1	u_2	y_1	y_2	v_1	v_2	z_1	z_2	rS	Q
	$ZF + 2MIV$	0	0	$-5M$	$-10M$	$3M$	M	0	$2M$	$-2M$	0	$-2M$	
x_1	I	1	0	$1/2$	$3/2$	$-1/2$	0	0	0	$1/2$	0	$5/2$	1.666
z_2	$II - 2IV$	0	0	5	10	-3	-1	0	-2	3	1	2	0.2
v_1	$III - 2IV$	0	0	$5/2$	$15/2$	$-5/2$	0	1	-2	$5/2$	0	$3/2$	0.2
x_2	IV	0	1	$-3/2$	$-9/2$	$3/2$	0	0	1	$-3/2$	0	$3/2$	–

Nehme nun u_2 in die Basis. Da das Ziel die Elimination der künstlichen Variablen ist, nehme ich z_2 aus der Basis. Man erhält:

		x_1	x_2	u_1	u_2	y_1	y_2	v_1	v_2	z_1	z_2	rS
	$ZF + MII$	0	0	0	0	0	0	0	0	M	M	0
x_1	$I - 0.15II$	1	0		0							2.2
u_2	$II/10$	0	0	0.5	1	-0.3	-0.1	0	-0.2	0.3	0.1	0.2
v_1	$III - 0.75II$	0	0		0							0
x_2	$IV + 0.45II$	0	1		0							2.4

Als Lösung erhält man $x_1 = 2.2, x_2 = 2.4$.

Hilfsfunktionsverfahren

Betrachte Probleme der Art

$$\max f(\vec{x}),\ \text{Nebenbedingungen } g_i(\vec{x}) \leq b_i, i_1, \cdots, m, \quad \vec{x} \geq \vec{0}$$

Dabei sei $f(\vec{x})$ konkav, sowie die Menge der zulässigen Lösungen $X = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n | g_i(\vec{x}) \leq b_i, i = 1, \cdots m, \vec{x} \geq \vec{0}\}$ eine konvexe Menge.

Strafkostenverfahren

Betrachte $\max f(\vec{x}) - \alpha S(\vec{x})$ wobei etwaige Verletzungen der Zulässigkeit durch eine Strafkostenfunktion $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ berücksichtigt werden.

Dabei ist $S(\vec{x}) = 0 \forall \vec{x} \in X$ und weiters strebt $S(\vec{x})$ gegen unendlich, je weiter $\vec{x}$ vom zulässigen Bereich X entfernt ist.

Barriere-Verfahren

z.B. SUMT (**S**equential **U**nconstrained **M**aximization **T**echnique)

$\max P(\vec{x}, r) = f(\vec{x}) - rB(\vec{x})$ mit $r > 0$,

wobei $B(\vec{x})$ eine Barrierefunktion ist, die ein Verlassen des zulässigen Bereiches verhindern soll.

- $B(\vec{x})$ ist klein, wenn $\vec{x} \in X$ weit vom Rand des zulässigen Bereiches entfernt ist
- $B(\vec{x})$ ist groß, wenn $\vec{x} \in X$ dicht am Rand von X liegt.
- $B(\vec{x})$ strebt gegen ∞, wenn $\vec{x}$ gegen den Rand von X strebt.

Man kann etwa

$$B(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{b_j - g_j(\vec{x})} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}$$

nehmen.

Algorithmus:

1. Wähle kleines $\epsilon > 0$ (Abbruchschranke), $r > 0$, $\Theta \in (0, 1)$.

   Initialisierung: Setze $k = 0$, wähle zulässigen Startpunkt $\vec{x}^{(0)}$ der nicht am Rand von X liegt.

2. Iterationen $k = 0, 1, 2, \cdots$:

   Ausgehend von $\vec{x}^{(k)}$ bestimmt man mit einem Verfahren der unrestringierten mehrdimensionalen Maximierung eine Näherung $\vec{x}^{(k+1)}$ für ein Maximum von

   $$P(\vec{x}, r) = f(\vec{x}) - r\left(\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{b_j - g_j(\vec{x})} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right)$$

3. Falls $\|\vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^{(k+1)}\| < \epsilon \quad \Rightarrow$ Abbruch, $\vec{x}^{(k+1)}$ ist eine Näherung für ein Maximum von f auf dem Bereich X. Ansonst: setzte $r = \Theta r$ und gehe zum nächsten Iterationsschritt.

Bemerkung

Dieser Algorithmus kann auch bei Gleichheitsnebenbedingunen der Form $h_k(\vec{x}) = d_k, k = 1, \cdots, q$ angewandt werden.

$$P(\vec{x}, r) = f(\vec{x}) - r\left(\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{b_j - g_j(\vec{x})} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right) - \sum_{k=1}^{q} \frac{(d_k - h_k(\vec{x}))^2}{\sqrt{r}}$$

Entscheidung bei Mehrfachzielsetzung

1. eine diskrete Entscheidungsvariable, n "Evaluatoren" bzw. "Konsequenzen" oder "Ziele".

   Bsp.: Autokauf

	Preis	Verbrauch	Leistung (kW)
VW	16 200	7.2 l/100 km	66
Opel	14 900	7.0 l/100 km	62
Ford	14 000	7.2 l /100 km	55
Toyota	15 200	8.2 l/100 km	71
	↓	↓	↓
	min	min	max

2. mehrere Entscheidungsvariable, stetige und diskrete Entscheidungsvariable möglich, Nebenbedingungen

   Bsp: Bau eines Wasserspeichers

   Entscheidungsvariable: Mann-Monate für Konstruktion, Radius des Sees, Design des Damms

   Kriterien: Speicherkapazität (max.), Baukosten (min.), Verlust durch Verdunstung (min.)

   Nebenbedingungen: minimale Dicke des Staudamms

3. **Bsp:** 1 stetige Entscheidungsvariable, 2 Funktionen

$$\min_{x\geq 0}(f_1(x), f_2(x)), \quad \text{mit } f_1(x) = \sqrt{x+1}, f_2(x) = (x-2)^2 + 1$$

Def: Zwei Ziele verhalten sich zueinander

- **indifferent** (bzw. neutral) , wenn die Realisierung des einen Zieles ohne jeden Einfluss auf den Realisierungsgrad des anderen Zieles ist.

- **komplementär** wenn durch die Erfüllung des einen Zieles auch der Realisierungsgrad des anderen Zieles gesteigert wird.

  Man unterscheidet **symmetrische Komplementarität** wenn die Abhängigkeit zwischen den Realisierungsgraden der beiden Ziele wechselseitig ist, und **asymmetrische Komplementarität** wenn ein erhöhter Realisierungsgrad des einen Zieles zwar zur Förderung des anderen Zieles führt aber nicht umgekehrt.

- **konkurrierend**, falls die Erfüllung eines Zieles den Realisierungsgrad des anderen Zieles beeinträchtigt.

Bsp: Asymmetrische Komplementarität liegt etwa zwischen "Kapitalrendite" und "Kapitalumschlag" vor. Eine Beschleunigung des Kapitalumschlags fördert die Kapitalrendite, eine verbesserte Kapitalrentabilität ist hingegen nicht notwendig mit einem beschleunigten Kapitalumschlag verbunden.

Def.:

- Eine Lösung $x^* \in X$, die hinsichtlich jeder der Zielfunktionen $f_i(x), i = 1, \cdots n$ optimal ist, heißt **perfekte Lösung.**

  i.A. jedoch liegt meist ein Zielkonflikt vor

- Eine Lösung $\hat{x} \in X$ dominiert eine Lösung $\tilde{x} \in X$, falls $\hat{x}$ hinsichtlich jeder Zielfunktion $f_i(x)$ mindestens gleich gut wie $\tilde{x}$ ist, und bezüglich mindestens eines Kriteriums besser ist.

i.e. bei Maximierungsproblemen: $f_k(\hat{x}) \geq f_k(\tilde{x}) \quad \forall k = 1, \cdots n$ und $f_i(\hat{x}) > f_i(\tilde{x})$ für mindestens ein i.

- Jede zulässige Lösung, die von keiner anderen zulässigen Lösung dominiert wird, heißt **funktional effizient** (oder **pareto-optimal**).

- Die Menge aller funktional effizienter Lösungen ergibt die **vollständige Lösung.**

Spezielle Entscheidungsregeln:

Lexikographische Ordnung:

- Ordne Ziele bzw. Zielfunktionen nach ihrer Wichtigkeit

- Optimiere nach dem wichtigsten Ziel

- stimmen Alternativen bezüglich des wichtigsten Ziels überein, ordne ich diese nach dem zweitwichtigsten Ziel

- ...

Bsp:

	Verbrauch	Preis	Leistung (kW)
Opel	7.0 l/100 km	14 900	62
Ford	7.2 l/100 km	14 000	55
VW	7.2 l/100 km	16 200	66
Toyota	8.2 l/100 km	15 200	71

Vertausch man Preis und Leistung $\Rightarrow$ Ford und VW werden umgereiht.

Nachteil: Eine Alternative A wird B auch dann vorgezogen, wenn A bezüglich eines wichtigeren Ziels nur geringfügig besser als B ist, selbst wenn A in einem untergeordneten Ziel bedeutend schlechter als B ist.

Hauptziel und Nebenziele:

- Definiere **ein** Ziel als Hauptziel, das maximiert/minimiert werden soll. Die übrigen Ziele sind dann die Nebenziele.

- definiere für diese Nebenziele, Schranken.

  falls das Nebenziel minimiert werden sollte $\Rightarrow$ obere Schranke

  falls das Nebenziel maximiert werden sollte $\Rightarrow$ untere Schranke

  Bsp: Speichersee:

  Hauptziel: Baukosten minimieren

  Nebenbedingungen: Verdunstung $\leq V_{max}$, Kapazität $\geq K_{min}$

Min-Max-Kriterium:

Bsp: angenommen die beiden Funktionen $f_1(x) = \sqrt{x+1}$, $f_2(x) = (x-2)^2+1$ beschreiben die Konzentration eines Schadstoffes in Abhängigkeit der Produktionsintensität x.

$$x^{opt} = \text{argmin } \{\max\{f_1(x), f_2(x)\}\}$$

i.e. die maximale Umweltbelastung wird minimiert.

Zielgewichtung:

Wahl von positiven Gewichten $\lambda_i > 0, \sum \lambda_i = 1$. Multiplikation der einzelnen Zielfunktionen $f_i(\vec{x}), i = 1, \cdots, r$ mit den Gewichten und anschliessendes Aufsummieren.

$$\vec{x}^{opt} = \text{argmax } \sum_i \lambda_i f_i(\vec{x})$$

Goal Programming:

Zunächst bestimmt man für jedes der Einzelzielfunktionen das Optimum, i.e. $f_i^* = \max_x f_i(\vec{x})$ bzw. $f_i^* = \min_x f_i(\vec{x})$.

Die optimale Lösung wird dann so bestimmt, dass der Abstand der Zielfunktionalswerte zum Vektor der Einzeloptima möglichst gering wird, i.e.

$$x^{opt} = \operatorname{argmin} \left\| \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_n(\vec{x}) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f_i^* \\ \vdots \\ f_n^* \end{pmatrix} \right\| = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |f_i(\vec{x}) - f_i^*|^p}$$

p ist dabei ein Parameter, $p \in \mathbb{N}$.

Durch Verwenden unterschiedlicher Gewichte kann man die optimale Lösung auch folgendermaßen berechnen:

$$x^{opt} = \operatorname{argmin} \begin{cases} \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i |f_i(\vec{x}) - f_i^*|^p} & \text{mit} \quad p \in \mathbb{N} \\ \max_i \lambda_i |f_i(\vec{x}) - f_i^*| & \text{für} \quad 'p = \infty' \end{cases}$$

Standortwahl als Entscheidungsproblem bei Mehrfachzielsetzung

Bsp: Standortwahl für Fabrik

Die britische Firma *Manchester Candies* will in den USA eine Zuckerlfabrik errichten. 3 mögliche Standorte stehen zur Auswahl, die anhand von 10 Kriterien beurteilt werden.

Attribute	S_1 : Pocahontas, W. Va	S_2: Hampson, Ky.	S_3 : Nitral, S.C.
X_1 : Arbeitskräfte	geringe Ausbildung, beschränkt vorhanden,	mittelmäßige Ausbildung, ausreichend vorhanden	mittelmäßige Ausbildung, Arbeitskräftemangel
X_2 : Transport	beschränkt, Autobahnanbindung in 2 Jahren erwartet	gute Nord-Süd Verbindung, Ost-West mangelhaft	beschänkt, keine Ausbaupläne
X_3 : Rohmaterialien	350 km zum nächsten Hafen, Wasser, Milch ausreichend	450 km zum nächsten Hafen, Milch beschränkt, Wasser verschmutzt	200 km zum nächsten Hafen, Milch verfügbar, Ausbau . beschränkt
X_4 : Klima Klima	Temp:: $0 - 90°F$ (Mittel: $52°F$),$32''$Regen/Jahr	Temp: $10 - 100°F$ (Mittel: $57°F$),$24''$Regen/Jahr	Temp: $30 - 100°F$ (Mittel: $63°F$),$20''$Regen/Jahr
X_5 : Gesellschaft	ländlich, Schulen mangelhaft beschränkte öffentliche Einrichtungen	ländlich, Schulen mangelhaft beschränkte öffentliche Einrichtungen	ländlich, Schulen mangelhaft beschränkte öffentliche Einrichtungen
X_6 : Umweltschutz	saubere Umwelt, keine Probleme	verschmutzte Flüsse, Werk verursacht Umweltschäden	saubere Umwelt, keine Probleme
X_7 : Energie	beschränkte Gasversorgung, kann ausgebaut werden	Gas vorhanden	Gas vorhanden
X_8 : Regierung:	gutgesinnt, Steuervorteile	bevorzugt Schwerindustrie, beschränkte Steuervorteile	gutgesinnt, Steuervorteile, 5 Jahre keine Miete
X_9 : Kapital	20.2 Mio.	19.9 Mio.	20.6 Mio.
X_{10} : Kosten	5.2 Mio./Jahr	6.2 Mio./Jahr	5.8 Mio./Jahr

Die Kostenstrukturen (X_9, X_{10}) sind ähnlich, weiters sind die drei Standorte bezüglich X_4 (Klima) und X_5 (Gesellschaft) gleich. Ziehe daher zur

Entscheidung die qualitativen Kriterien $X_1 - X_3, X_6 - X_8$ heran. Bezüglich dieser Kriterien ergibt sich folgendes ranking:

	X_1	X_2	X_3	X_6	X_7	X_8
S_1	3	2	1	1	3	2
S_2	1	1	3	3	1	3
S_3	1	3	2	1	1	1

Bei "Unentschieden" nimmt man das arithmetische Mittel

	X_1	X_2	X_3	X_6	X_7	X_8
S_1	3	2	1	1.5	3	2
S_2	1.5	1	3	3	1.5	3
S_3	1.5	3	2	1.5	1.5	1

Berechne die Distanzmatrix

$$D = \begin{pmatrix} 6.5 & 3.5 & 5.5 \\ 7.0 & 5.0 & 5.0 \\ 4.5 & 3.5 & 7.5 \end{pmatrix}$$

z.B. $d_{2,1} = |1.5 - 1| + |1 - 1| + |3 - 1| + |3 - 1| + |1.5 - 1| + |3 - 1| = 7.0$

AHP

Analytical **H**ierarchy **P**rocess

Grundidee: Auflösen des Oberzieles eines multikriteriellen Entscheidungsproblems in eine Hierachie von Unterzielen.

Das Bestimmen der partiellen Wertefunktionen und der Gewichte erfolgt auf sehr ähnliche Weise.

Im einfachsten Fall: Ein Oberziel, dessen Nutzen als gewichtete Summe der (partiellen) Nutzen der Alternativen bezüglich der einzelnen Konsequenzen gegeben ist.

D.h. bilden einer Präferenzfunktion $\Phi^{AHP} = \sum_{i=1,n} g_i v_i(.)$.

Bestimmen der Wertefunktionen

Wir betrachten eine Konsequenz X_k und n Alternativen $a_i, i = 1, \cdots n$ und wollen $v_k(a_i)$ bestimmen (k fest, $i = 1, \cdots n$).

Möglichkeit 1: Auswahl einer Alternative, z.B der Schlechtesten. Setzen $v_k(a^{\min}) = 0$ und bestimmen durch Vergleich die $v_k(a_i)$. Normieren derart, dass Wert der besten Alternative = 1 ist.

Insgesamt $n - 1$ Vergleichurteile erforderlich. Da der Vergleich jeweils mit einer bestimmten Alternative erfolgt, besteht die Gefahr systematischer Fehler.

Möglichkeit II: Jede Alternative a_i wird mit jeder Alternative a_j verglichen $\Rightarrow \quad n(n-1)$ Vergleichsurteile.

Der Paarvergleich wird durch **Verhältnisse** ausgedrückt, d.h. der Entscheidungsträger gibt an, um wieviel eine Alternative a_i besser ist als Alternative a_j im Hinblick auf Konsequenz X_k.

Man erhält eine **empirische Paarvergleichsmatrix**

$$V = \begin{pmatrix} 1 & v_k(1,2) & \cdots & v_k(1,n) \\ v_k(2,1) & 1 & & v_k(2,n) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ v_k(n,1) & \cdots & v_k(n,n-1) & 1 \end{pmatrix}$$

dabei bedeutet z.B. $v_k(i,j) = 3$, dass a_i 3-mal besser eingeschätzt wird als a_j bezüglich Konsequenz X_k.

Oft wird angenommen, dass der Paarvergleich nur Werte zwischen 1 und 9 annehmen kann (und die Reziprokwerte).

Es wird angenommen, dass die Matrix V reziprok ist, d.h.

$$v_k(i,j) = \frac{1}{v_k(j,i)}$$

Verhielte sich der Entscheidungsträger **konsistent** müsste ausserdem

$$v_k(i,j)v_k(j,l) = v_k(i,l)$$

gelten. (Konsistenzbedingung)

Ziel des AHP: Bestimmen einer konsistenten Wertefunktion, die möglichst gut den Angaben des Entscheidungsträgers entspricht.

Betrachten zunächst die konsistente Situation:

$$v_k(i,j) = \frac{v_k(a_i)}{v_k(a_j)}$$

d.h. das Verhältnis entspricht dem Quotienten der partiellen Wertefunktionen.

Klarerweise ist die Konsistenzbedingung erfüllt:

$$v_k(i,j)v_k(j,l) = \frac{v_k(a_i)}{v_k(a_j)}\frac{v_k(a_j)}{v_k(a_l)} = \frac{v_k(a_i)}{v_k(a_l)} = v_k(i,l)$$

Eine **konsistente Paarvergleichsmatrix** hat also die Gestalt

$$\bar{V} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{v_k(a_1)}{v_k(a_2)} & \cdots & \frac{v_k(a_1)}{v_k(a_n)} \\ \frac{v_k(a_2)}{v_k(a_1)} & 1 & & \frac{v_k(a_2)}{v_k(a_n)} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{v_k(a_n)}{v_k(a_1)} & \cdots & \frac{v_k(a_n)}{v_k(a_{n-1})} & 1 \end{pmatrix}$$

Bestimme nun eine konsistente Paarvergleichsmatrix, d.h. eine partielle Wertefunktion $v_k(a_i)$ die möglichst der empirischen Matrix entspricht:

Regressionsanalytischer Ansatz:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(v_k(i,j) - \frac{v_k(a_i)}{v_k(a_j)}\right)^2 \to \min,$$

unter den Nebenbedingungen: $v_k(a_i) \geq 0, \sum v_k(a_i) = 1$.

Eigenwertverfahren: Gegeben ist die inkonsistente empirische Matrix V und gesucht ist ein Vektor $\vec{v} = (v_k(a_1), v_k(a_2), \cdots, v_k(a_n))^t$ der die Wertefunktion konsistent approximiert.

Angenommen, die empirische Matrix ist konsistent. Dann gilt:

$$v_k(i,j) = \frac{v_k(a_i)}{v_k(a_j)} \quad \Rightarrow v_k(i,j)v_k(a_j) = v_k(a_i) \quad \forall i,j = 1,\ldots n$$

Durch Summieren

$$\sum_{j=1}^{n} v_k(i,j)v_k(a_j) = nv_k(a_i) \quad \forall i = 1,\ldots n$$

d.h. unter Konsistenz gilt:

$$V\vec{v} = n\vec{v}$$

Somit ist n Eigenwert von V und $\vec{v}$ ist der dazugehörende Eigenvektor.

Nun gilt für konsistente Paarvergleichsmatrizen, dass der größte Eigenwert n ist, und alle anderen Eigenwerte $= 0$ sind. D.h. in der konsistenten Situation ist $\vec{v}$ der Eigenvektor zum grössten Eigenwert von V.

Für **inkonsistente** Paarvergleichsmatrizen bestimmt man nun $\vec{v}$ ebenfalls als Eigenvektor zum grössten Eigenwert der Paarvergleichsmatrix. Er wird derart normiert, dass $\sum_i v_k(a_i) = 1$.

Inkonsistenzmass Für positive reziproke $n \times n-$Matrizen gilt stets: $\lambda^{max} \geq n$.

$$\Rightarrow \quad IK = \frac{\lambda^{max} - n}{n-1} \cdots \text{Inkonsistenzmass}$$

Je grösser IK ist, desto inkonsistenter sind die Paarvergleiche des Entscheidungsträgers. Ist $IK > 0.1$ so sollte der Entscheidungsträger seine Vergleichsurteile nochmals überdenken.

Bestimmen der Gewichte: Die Bestimmung der Gewichte erfolgt analog zur Bestimmung der Wertefunktion. Bezüglich verschiedener Konsequenzen X_k und X_l müssen Vergleichsurteile $G(k,l)$ abgegeben werden. Bei Konsistenz gilt:

$$G(k,l) = \frac{g_k}{g_l}$$

Es werden konsistente Gewichte bestimmt, die so gut wie möglich die tatsächlichen Urteile approximieren.

Bsp:

Wohnung	Lärmbelästigung	Größe	Entfernung
A	laut	52 qm	30 min
B	sehr laut	23 qm	5 min
C	leise	15 qm	25 min
D	noch nicht zu laut	30 qm	15 min

Präferenzurteile bezüglich **Lärm:**

	A	B	C	D
A	1	3	1/5	1/3
B		1	1/9	1/5
C			1	4
D				1

1 = gleichwertig, 3=etwas günstiger, 5=günstiger, 7=viel günstiger, 9=sehr viel günstiger

Bezüglich Lärm ist Wohnung A "etwas günstiger" als B. etc.

Eigenwert: $\lambda^{max} = 4.127$, Eigenvektor: (0.110, 0.048, 0.611, 0.231). d.h. die partielle Wertefunktion ist: $v_L(A) = 0.110, v_L(B) = 0.048, v_L(C) = 0.611, v_L(D) = 0.231$. Das Inkonsistenzmass ist: $IK = 0.042$.

Bezüglich Grösse:

	A	B	C	D
A	1	7	9	5
B		1	3	1/4
C			1	1/5
D				1

$\lambda^{max} = 4.231, \vec{v}_G = (0.650, 0.087, 0.045, 0.218)^t, IK = 0.077$

Bezüglich Entfernung:

	A	B	C	D
A	1	1/9	1/3	1/5
B		1	8	5
C			1	1/4
D				1

$\lambda^{max} = 4.230, \vec{v}_G = (0.045, 0.659, 0.083, 0.213)^t, IK = 0.076$

Bestimmen der Gewichte:

	Lärm	Grösse	Entfernung
Lärm	1	1/3	4
Grösse		1	9
Entfernung			1

$\lambda^{max} = 3.01, (g_L, g_G, g_E) = (0.250, 0.681, 0.069)$

$\Rightarrow$ Präferenzfunktion $\Phi^{AHP}(.) = g_L v_L(.) + g_G v_G(.) + g_E v_E(.)$

Wohnung	A	B	C	D
Φ^{AHP}	0.474	0.117	0.189	0.220

$\Rightarrow$ Präferenzordnung: A $\succ$ D $\succ$ C $\succ$ B

References

[1] Kall, Peter und Wallace, Stein W., Stochastic Programming, J. Wiley and Sons, Chichester, 1995.