# Examen

**Name** : _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

**Mat. Nr.** : _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

**Kennz.** : _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

- Es sind nur handschriftliche Mitschriften zugelassen.

- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Es sind maximal 22 Punkte zu erreichen.

- Viel Erfolg !

| **Aufgabe** | **1** | **2** | **3** | **4** |
|---|---|---|---|---|
| **Punkte** | **6** | **5** | **5** | **6** |
| **Score** | | | | |

$$\boxed{\sum = \quad\quad}$$

Universität Wien
Prof. Dr. D. Burde

# Analytische Zahlentheorie
## — Examen —

Wintersemester 2005/06

---

**1. Arithmetische Funktionen.** Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

(a) Ist $n \geq 1$ eine Primzahl, so gilt $\sigma(n) + \varphi(n) = n\tau(n)$.
(b) Es gibt ein $n \geq 1$ mit $\varphi(n) = 31$.
(c) Aus $\varphi(n) = 6$ folgt $n = 7$.
(d) Es gibt unendlich viele $n \geq 1$ mit $\varphi(n) \mid n$.

(6 Punkte)

**2. Eulers Summationsformel.** Man beweise mit Hilfe der Eulerschen Summationsformel, daß es eine Konstante $A$ gibt, so daß für alle $N \geq 2$ gilt:

$$\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n\log(n)} = \log(\log(N)) + A + O\left(\frac{1}{N\log(N)}\right).$$

(5 Punkte)

**3. Die Primzahlzählfunktion.** Unter der Voraussetzung $\theta(x) = O(x)$ zeige man folgende Aussage:

$$\pi(x) = \frac{\theta(x)}{\log(x)} + O\left(\frac{x}{\log^2(x)}\right).$$

(5 Punkte)

**4. L-Reihen und Dirichlets Theorem.** Man bestimme die Werte aller Dirichlet-Charaktere $\chi$ modulo 4 und berechne die L-Reihen $L(s,\chi)$ explizit. Für den Hauptcharakter $\chi_1$ modulo 4 und $\mathrm{Re}(s) > 1$ zeige man $L(s,\chi_1) = (1-2^{-s})\zeta(s)$. Für $\chi \neq \chi_1$ zeige man $L(1,\chi) > 0$ und

$$\sum_{n \leq x} \chi(n)\frac{\log(n)}{n} = O(1).$$

(6 Punkte)

Abgabe: Freitag, 03. Februar 2006