Sommersemester 2000

Dr. D. Burde

Vorlesung: Elementare Zahlentheorie II

Freitag 9:30 Uhr in 25.22-00.72

Der erste Teil der Vorlesung beschäftigt sich mit dem Problem, natürliche Zahlen als Summe von Quadratzahlen darzustellen. Diophantus wußte, und Legendre bewies, daß jede natürliche Zahl als Summe von vier Quadraten darstellbar ist. Jacobi zeigte ein noch stärkeres Resultat. Die Anzahl $r_4(n)$ der Darstellungen von n als Summe von vier Quadraten ist gleich 8 mal der Summe der Teiler von n, die nicht durch 4 teilbar sind. Die Beweise dazu können ganz elementar geführt werden. Das gilt auch für den Fall von zwei Quadraten, der von Fermat gelöst wurde: eine natürliche Zahl n ist genau dann die Summe zweier Quadratzahlen, wenn in der Primfaktorzerlegung von n die Primteiler $p \equiv 3(4)$ nur in gerader Potenz auftreten. Dafür gibt es eine Reihe interessanter Beweise. Die Anzahl $r_2(n)$ solcher Darstellungen ist $4(d_1(n) - d_3(n))$, wobei $d_j(n)$ die Anzahl der Teiler $d \equiv j(4)$ von n bedeutet. Man hat einige explizite Formeln für $r_k(n)$, die Anzahl der Darstellungen von n als Summe von k Quadraten. Für $k = 2, 4, 6, 8$ hat man etwa (die Kongruenzen sind modulo 4 gemeint):

$$
\begin{aligned}
r_2(n) &= 4(d_1(n) - d_3(n)) \\
r_4(n) &= 8 \sum_{d|n,\, d\not\equiv 0} d \\
r_6(n) &= 16 \left(\sum_{rd=n,\, r\equiv 1} d^2 - \sum_{rd=n,\, r\equiv 3} d^2 - \frac{1}{4}\left(\sum_{d|n,\, d\equiv 1} d^2 - \sum_{d|n,\, d\equiv 3} d^2 \right) \right) \\
r_8(n) &= (-1)^n 16 \sum_{d|n} (-1)^d d^3
\end{aligned}
$$

Der Fall k ungerade ist deutlich schwieriger. Gauss konnte den folgenden Satz zeigen: eine natürliche Zahl n ist genau dann als Summe dreier Quadrate darstellbar, wenn n nicht darstellbar ist als $4^\ell k$ mit $k \equiv 7(8)$ und $\ell, k \in \mathbb{N}_0$. Wir wollen danach auch kurz auf das Waringsche Problem eingehen, nämlich wieviele Kuben, oder allgemein k-te Potenzen es mindestens benötigt, um jede natürliche Zahl als Summe davon darzustellen. Im Fall von Kuben sind es übrigens 9, und bei 4-ten Potenzen 19 (nicht etwa 16).

Im zweiten Teil der Vorlesung soll es um die Partitionsfunktion $p(n)$ gehen. Mit $p(n)$ wird die Anzahl der verschiedenen Darstellungen von n als Summe natürlicher Zahlen bezeichnet. Wir wollen Rekursionsformeln herleiten und die asymptotische Formel für $p(n)$ von Hardy und Ramanujan diskutieren:

$$p(n) = \frac{1}{4\sqrt{3}n} e^{\pi\sqrt{2n/3}}(1 + o(1))$$

Die Vorlesung bleibt **elementar** und eignet sich gut als Ergänzung zum Schwerpunkt Zahlentheorie. Es werden Übungen angeboten.