Universität Wien
Dietrich Burde

Lie Algebren und Darstellunstheorie
— Aufgaben —

Blatt 1 SS 2008

---

1. Die Exponentialfunktion. Für $A \in M_n(\mathbb{C})$ sei

$$\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

Man zeige die folgenden Aussagen:

(1) $\exp(0) = I_n, \quad \exp(-A) = \exp(A)^{-1}$,
(2) $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$ für $[A,B] = 0$,
(3) $\exp(BAB^{-1}) = B\exp(A)B^{-1}$ für alle $B \in GL(n,\mathbb{C})$,
(4) $\det(\exp(A)) = e^{\operatorname{tr}(A)}$.

Ist $\exp\colon M_n(\mathbb{C}) \to GL(n,\mathbb{C})$ injektiv bzw. surjektiv ?

(5 Punkte)

2. Nilpotente Ideale. Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie Algebra und $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zwei nilpotente Ideale in $\mathfrak{g}$. Man zeige, daß auch $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ ein nilpotentes Ideal in $\mathfrak{g}$ ist.

(4 Punkte)

3. Das Nilradikal. Man zeige mit Hilfe von 2., daß es ein größtes nilpotentes Ideal in einer endlich-dimensionalen Lie Algebra gibt. Es wird das *Nilradikal* von $\mathfrak{g}$ genannt, und wird mit $\operatorname{nil}(\mathfrak{g})$ bezeichnet. Man zeige, daß

$$[\operatorname{rad}(\mathfrak{g}), \mathfrak{g}] \subseteq \operatorname{nil}(\mathfrak{g}),$$

wobei $\operatorname{rad}(\mathfrak{g})$ das auflösbare Radikal von $\mathfrak{g}$ bezeichnet.

(5 Punkte)

4. Das Radikal der Killingform. Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie Algebra mit Killingform κ, d.h.,

$$\kappa(x,y) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad}(x)\operatorname{ad}(y)), \quad x,y \in \mathfrak{g}.$$

Man zeige, daß das orthogonale Komplement von $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ bezüglich κ,

$$[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]^{\perp} = \{x \in \mathfrak{g} \mid \kappa(x,y) = 0 \;\; \forall\, y \in [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\}$$

genau das Radikal $\operatorname{rad}(\mathfrak{g})$ von $\mathfrak{g}$ ist.

(5 Punkte)

4. Beispiele für die Killingform. Berechne die Killingform für die Lie Algebren $\mathfrak{so}_3(\mathbb{R})$ und $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ bezüglich folgender Basen: (x, y, h) mit

$$[x, y] = h,\ [h, x] = 2x,\ [h, y] = -2y$$

für $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$, und

$$[x, y] = h,\ [h, x] = y,\ [y, h] = x$$

für $\mathfrak{so}_3(\mathbb{R})$.

(4 Punkte)

5. Charakteristische Ideale. Sei D eine Derivation von $\mathfrak{g}$. Man zeige, daß

$$D(\mathrm{rad}(\mathfrak{g})) \subseteq \mathrm{nil}(\mathfrak{g})$$

gilt, d.h., $\mathrm{nil}(\mathfrak{g})$ ein *charakteristisches Ideal* von $\mathfrak{g}$ ist, wie auch $\mathrm{rad}(\mathfrak{g})$.

(6 Punkte)

6. Treue Darstellungen. Finde eine *treue* (d.h. injektive) Darstellung für die Lie Algebra $\mathfrak{so}_3(\mathbb{R})$ aus Aufgabe 4. Sei $\mathfrak{h}_5(\mathbb{R})$ die 5-dimensionale Heisenberg Lie Algebra mit Basis x_1, x_2, y_1, y_2, z und definierenden Lie Klammern $[x_1, y_1] = [x_2, y_2] = z$. Man finde eine treue 4-dimensionale Darstellung

$$\rho\colon \mathfrak{h}_5(\mathbb{R}) \to \mathfrak{gl}_4(\mathbb{R})$$

von $\mathfrak{h}_5$.

Zusatz: Gibt es eine treue 3-dimensionale Darstellung von $\mathfrak{h}_5(\mathbb{R})$?

(6 Punkte)
