Linkssymmetrische Algebren
und
linkssymmetrische Strukturen auf Lie-Algebren

Inaugural-Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades
der hohen Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität zu Bonn

vorgelegt von
Dietrich Burde

Bonn 1992

Angefertigt mit Genehmigung
der Mathematisch–Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Bonn

Referent: Prof. Dr. F. Grunewald
Korreferent: Prof. Dr. G. Harder

Tag der Promotion 25.06.1992

Einleitung

Sei V ein Vektorraum über einem beliebigen Körper k. Betrachte ein bilineares, distributives Produkt $V \times V \to V$, $(x, y) \mapsto x.y$, das $A = (V, .)$ zu einer nicht-assoziativen Algebra über k macht. Die Algebra A heißt *linkssymmetrische Algebra*, oder *Koszul-Vinberg Algebra*, falls

$$x.(y.z) - (x.y).z = y.(x.z) - (y.x).z$$

für alle $x, y, z \in A$ gilt. Wenn A eine linkssymmetrische Algebra ist, dann ist die Operation

$$[x, y] = x.y - y.x$$

schief-symmetrisch und erfüllt die Jacobi Identität. Also besitzt jede linkssymmetrische Algebra eine assoziierte Lie-Algebra.
Hat man umgekehrt eine Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ über k gegeben, so heit ein Algebra-Produkt auf $\mathfrak{g}$, das die beiden obigen Bedingungen erfüllt, eine *kompatible linkssymmetrische Algebra-Struktur auf* $\mathfrak{g}$, oder kurz *linkssymmetrische Struktur auf* $\mathfrak{g}$.
Wenn nicht ausdrücklich anders gesagt, wird immer vorausgesetzt, da $\mathfrak{g}$ *endlich-dimensional* ist.
Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich vorrangig mit den folgenden Fragen:

1. *Für welche Lie-Algebren* $\mathfrak{g}$ *und Körper* k *existieren linkssymmetrische Strukturen auf* $\mathfrak{g}$ *?*
2. *Wie sieht die Klassifikation solcher Strukturen aus ?*

Die erste Frage wird für *einfache* Lie-Algebren weitgehend beantwortet, und zwar für beliebige Körper k. Es stellt sich heraus, daß in diesem Fall bei Charakteristik Null keine linkssymmetrischen Strukturen existieren können, der *modulare Fall* aber (das heißt $\mathrm{char}(k) > 0$) sehr interessant ist.
Wenn $\mathfrak{g}$ die Lie-Algebra einer zusammenhängenden halbeinfachen algebraischen Gruppe (über einem Körper der Charakteristik $p > 0$) ist, kann man zeigen, daß linkssymmetrische Strukturen höchstens dann existieren können, wenn p die Dimension der Lie-Algebra teilt (Theorem III.1.3.). Der Beweis wird mit Methoden der Darstellungstheorie algebraischer Gruppen geführt. Insbesondere werden gewisse Hochschild Kohomologiegruppen algebraischer Gruppen über modularen Körpern berechnet. Dabei werden neue Resultate von J.C. Jantzen benutzt.
Für einfache Lie-Algebren vom Cartan-Typ hingegen existieren „viel mehr“ linkssymmetrische Strukturen. Für reduktive und auflösbare Lie-Algebren ist hier auch der Fall Charakteristik Null von Interesse.
Bevor ich die Resultate dieser Arbeit erläutere, soll kurz dargelegt werden, wodurch linkssymmetrische Algebren und linkssymmetrische Strukturen *motiviert* sind:

Sei $\mathbb{K}$ der Körper der reellen oder komplexen Zahlen. Linkssymmetrische Algebren wurden zuerst in der Theorie der konvexen homogenen Kegel eingeführt. Man kann jedem konvexen homogenen Bereich eine sogenannte kompakte linkssymmetrische Algebra zuordnen, so da isomorphe konvexe homogene Bereiche zu isomorphen Algebren korrespondieren. Zu einer gegebenen kompakten linkssymmetrischen Algebra lät sich umgekehrt ein zugehöriger konvexer homogener Bereich konstruieren: Es besteht eine 1–1 Korrespondenz zwischen n-dimensionalen konvexen homogenen Kegeln und n-dimensionalen kompakten linkssymmetrischen Algebren (Vinberg [VI63]). Koecher hatte vorher speziellere konvexe Kegel (selbstadjungierte konvexe homogene Kegel und Positivitätsbereiche im $\mathbb{R}^n$) mit Hilfe halbeinfacher Jordan-Algebren beschrieben.
Linkssymmetrische Algebren und linkssymmetrische Strukturen auf Lie-Algebren treten vor allen Dingen in der Theorie der *affinen Mannigfaltigkeiten* auf.
Sei $M = M^n$ eine Mannigfaltigkeit mit Koordinatenatlas, so daß die Koordinatenwechsel-Abbildungen lokal affin (affine Transformationen des $\mathbb{R}^n$) sind. Eine solche Struktur heißt *affine Struktur* auf M , und M heißt *affine Mannigfaltigkeit*. M ist glatt.
Es gibt eine natürliche Korrespondenz zwischen affinen Strukturen auf M und flachen torsionsfreien affinen Zusammenhängen auf M (Krümmungstensor und Torsionstensor sind identisch Null). Man interessiert sich für *linksinvariante affine Strukturen* auf einer (ohne Einschränkung einfach zusammenhängenden) Lie-Gruppe. Diese besitzt genau dann eine vollständige linksinvariante affine Struktur, wenn sie scharf transitiv als affine Transformationen auf einem $\mathbb{R}^n$ operiert. In diesem Fall kann man den Quotienten $\Gamma \backslash G$ mit einer diskreten Untergruppe Γ zu einer kompakten affinen Mannigfaltigkeit machen. Hier treten die folgenden Fragen auf:

1. *Welche einfach zusammenhängenden Lie-Gruppen G lassen eine linksinvariante affine Struktur zu ?*
2. *Wie sieht die Klassifikation solcher Strukturen aus ?*

Die Fragen stellen ein offenes Problem dar (s. [ME81], [AU77], [MI77], [KI86]). Wenn G nilpotent ist vermutet man, daß immer eine linksinvariante affine Struktur existiert. Die Klassifikation ist sehr schwierig und bisher nur in Spezialfällen kleiner Dimension behandelt worden (siehe [KU53], [F-G83] und [KI86]).
Nun entsprechen diese Fragen genau denen für linkssymmetrische Strukturen (mit $k = \mathbb{K}$), da der folgende Satz gilt (siehe [GO88]) :

Satz: *Sei G eine einfach zusammenhängende Lie-Gruppe und $\mathfrak{g}$ die Lie-Algebra der linksinvarianten Vektorfelder auf G . Es gibt einen Isomorphismus zwischen der Kategorie der linkssymmetrischen Strukturen auf $\mathfrak{g}$ und der Kategorie der linksinvarianten affinen Strukturen auf G . Unter diesem Isomorphismus entsprechen die assoziativen Strukturen auf $\mathfrak{g}$ den bi-invarianten Strukturen auf G .*

Die eine Richtung dieses Satzes sieht man so: Sei ∇ der flache torsionsfreie affine Zusammenhang auf G , der zu einer gegebenen linksinvarianten affinen Struktur korrespondiert. Da der Zusammenhang linksinvariant ist, ist auch die kovariante Ableitung $\nabla_X Y \in \mathfrak{g}$ für je zwei linksinvariante Vektorfelder $X, Y \in \mathfrak{g}$ wieder linksinvariant. Deshalb definiert kovariante Differentiation $(X,Y) \mapsto \nabla_X Y$ eine bilineare Multiplikation $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, die kurz mit $(X,Y) \mapsto XY$ bezeichnet wird. Da ∇ lokal flach ist, bedeutet die Bedingung, daß ∇ Torsion Null hat, $XY - YX = [X, Y]$, und die Bedingung, daß ∇ Krümmumg Null hat damit

$$X(YZ) - Y(XZ) = (XY - YX)Z$$

Dies ist äquivalent zur Linkssymmetrie des Produktes. So erhält man die linkssymmetrische Struktur auf $\mathfrak{g}$.

Ich möchte nun auf den Inhalt der Arbeit zurückkommen. Zunächst ist bekannt, daß Lie-Algebren über $\mathbb{K}$ mit $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ keine linkssymmetrische Struktur zulassen (Helmstetter [HE79], Seite 31). Das Resultat kann man auch für halbeinfache Lie-Algebren über einem beliebigen Körper k der Charakteristik Null beweisen (Korollar I.1.14), indem man Whiteheads Lemma für die erste Lie-Algebra Kohomologie benutzt.
Die Annahme $\mathrm{char}(k) = 0$ ist allerdings ganz wesentlich für die Gültigkeit dieser Resultate: Wenn k ein modularer Körper ist, dann ist Whiteheads Lemma nicht länger richtig und man kann sogar klassische einfache Lie-Algebren finden, die linkssymmetrische Strukturen zulassen. Das war eine *überraschende* Entdeckung für mich. Ich möchte das folgende Beispiel angeben:
Sei k ein Körper der Charakteristik 3 und $\mathfrak{g} := kx \oplus ky \oplus kz = \mathfrak{sl}(2, k)$ mit $[x, y] = z$, $[z, x] = 2x$, $[z, y] = -2y$. Dann sieht man leicht, daß das folgende Produkt eine linkssymmetrische Struktur auf $\mathfrak{g}$ definiert (mit freiem Parameter $\gamma \in k^{\times}$):

$$\begin{array}{lllllllll}
x.x & = & 0 & y.x & = & (1-\gamma^{-1})z & z.x & = & (\gamma-1)x \\
x.y & = & -(1+\gamma^{-1})z & y.y & = & 0 & z.y & = & (\gamma+1)y \\
x.z & = & \gamma x & y.z & = & \gamma y & z.z & = & \gamma z
\end{array}$$

Es gibt auch noch weitere linkssymmetrische Strukturen auf $\mathfrak{sl}(2, k)$; sie werden in Satz IV.2.1 klassifiziert. Wenn die Charakteristik jedoch nicht 3 ist und $\mathfrak{sl}(2, k)$ einfach ist (also $p \neq 2$), existieren keine linkssymmetrischen Strukturen (Satz III.1.2.).
In Kapitel III. wird die Existenzfrage linkssymmetrischer Strukturen auf beliebigen einfachen Lie-Algebren behandelt.
Die bekannten endlich-dimensionalen einfachen Lie-Algebren über k sind entweder vom *klassischen Typ* (Analoga über k der endlich-dimensionalen einfachen Lie-Algebren über $\mathbb{C}$) oder vom *Cartan-Typ* (endlich-dimensionale Analoga über k der unendlichen Lie-Algebren von Cartan über $\mathbb{C}$), siehe Kapitel I.
Sei k algebraisch abgeschlossen von der Charakteristik $p > 7$. Man vermutet seit den sechziger Jahren, daß jede nicht-klassische endlich-dimensionale einfache Lie-Algebra vom Cartan-Typ ist. Block und Wilson ([B-W86]) bewiesen dies 1986 für *restringierte* Lie-Algebren. Jetzt scheint ein Beweis für den allgemeinen Fall der Klassifikation von H. Strade vorzuliegen ([ST89], [ST91]).
Für die klassischen Lie-Algebren einer algebraischen Gruppe G vom Typ

$$A_l\ (l \geq 1), B_l\ (l \geq 3), C_l\ (l \geq 2), D_l\ (l \geq 4), G_2, F_4, E_6, E_7, E_8$$

wird in Kapitel III. gezeigt, daß linkssymmetrische Strukturen höchstens dann existieren, wenn p die Dimension der Lie-Algebra teilt. Dazu wird in Kapitel II. die Hochschild-Kohomologie $H^1(G_1, M)$ für gewisse G_1-Moduln M kleiner Dimension berechnet. Mit

G_1 wird dabei der erste Frobenius-Kern von G bezeichnet. Bei diesem Problem, das durch die obigen Fragen motiviert war, hat mir Herr Prof. J.C. Jantzen erheblich weitergeholfen.
Für restringierte linkssymmetrische Strukturen kann dieses Resultat noch verschärft werden (Satz III.1.8.), nicht jedoch für $p = 2$.
Das Resultat kann auf nicht-restringierte einfache Algebren vom Cartan-Typ *nicht* übertragen werden. In diesem Fall hat man zum Teil sehr viele linkssymmetrische Strukturen, in allen Charakteristiken. Man kann dann sogenannte *adjungierte* linkssymmetrische Strukturen konstruieren, die durch nicht-singuläre Derivationen induziert werden. Das führt auch auf die Frage, welche einfachen Lie-Algebren überhaupt nicht-singuläre Derivationen zulassen. Dazu mu notwendigerweise gelten, daß die Charakteristik positiv und die Lie-Algebra nicht-restringiert ist (siehe Satz I.2.13.). Dann allerdings können sehr wohl solche einfache Lie-Algebren existieren, z.B. die Lie-Algebra $\mathcal{L}(G, \delta, f)$ von R. Block der Dimension $p^n - 1$.
Eine Algebra $\mathcal{L}(G, \delta, f)$ lät damit linkssymmetrische Strukturen für alle Charakteristiken $p > 0$ zu (Satz III.2.5). Wenn man Beispiele linkssymmetrischer Strukturen auf einfachen Lie-Algebren konkret gegeben hat–und in dieser Arbeit werden viele Beispiele angegeben–, dann kann man oft auch die Automorphismengruppe dieser linkssymmetrischen Algebren bestimmen (siehe auch Satz I.1.11.) Hier könnten sich interessante Gruppen ergeben, allerdings erst in höheren Dimensionen, wo die Berechnungen dann sehr schwierig werden.
Die Frage *1.* der Einleitung ist äquivalent zu der Frage nach Lie-Algebren $\mathfrak{g}$, die *invertierbare* 1-*Kozykel* für eine $\mathfrak{g}$-Modul Struktur auf $\mathfrak{g}$ besitzen. Ob man ein Kriterium finden kann, womit man bei einer vorgelegten Lie-Algebra über k definitiv entscheiden kann, ob linkssymmetrische Strukturen existieren, ist mir nicht klar. Ebenso kann ich das Klassifikationsproblem hier nicht lösen.
In Kapitel IV. werden linkssymmetrische Algebren in kleinen Dimensionen über k klassifiziert (man setzt meist voraus, daß k algebraisch abgeschlossen ist). Es werden elementare Mittel der linearen Algebra verwendet. Es deutet sich aber an, daß die allgemeine Klassifikation womöglich ein hoffnungsloses Unterfangen ist.

Am Schlu der Arbeit steht noch ein Kapitel, das weitgehend eigenständig ist (Kapitel V.). Hier werden linkssymmetrische Strukturen auf der Lie-Algebra $\mathfrak{gl}(n, k)$ über Körpern der Charakteristik ungleich 2 oder 3 untersucht. Zelmanov und Grunewald haben vermutet, daß solche Strukturen bereits assoziativ sein müten. Das wird durch die Konstruktion universeller Gegenbeispiele widerlegt. Für linkssymmetrische *kubisch-assoziative* Strukturen auf $\mathfrak{gl}(n, k)$ kann man jedoch zeigen, daß solche Strukturen bereits assoziativ sein müssen. Dies gilt i.a. nicht für andere Lie-Algebren.

Mein Dank für die gute Betreuung der Arbeit gilt Herrn Prof. F. Grunewald, der sich auch für meinen Amerika-Aufenthalt bei J.C. Jantzen eingesetzt hat. Herrn Prof. J.C. Jantzen möchte ich ganz herzlich für seine wertvollen Ratschläge und die intensive Anteilnahme an meinen Fragen danken. Die Studienstiftung des Deutschen Volkes hat meine Promotion mit einem Stipendium unterstützt und es mir so ermöglicht, mich ganz der Promotion zu widmen. Zuletzt möchte ich Stefan Kühnlein danken, daß er sich die Mühe gemacht hat, meine Arbeit zu lesen, und mich auf kleinere Unkorrektheiten aufmerksam gemacht hat.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel I. Grundlagen ... 1

1. Linkssymmetrische Algebren ... 1
2. Modulare Lie-Algebren ... 9
3. Lie-Algebra Kohomologie und Kohomologie algebraischer Gruppen ... 14

Kapitel II. Die erste Kohomologiegruppe für klassische Lie-Algebren ... 18

1. Klassifikation einfacher G_1-Moduln in kleinen Dimensionen ... 18
2. Berechnung von $H^1(G_1, L(\lambda))$ für einfache Moduln kleiner Dimension ... 23

Kapitel III. Linkssymmetrische Strukturen auf einfachen Lie-Algebren ... 26

1. Linkssymmetrische Strukturen auf klassischen Lie-Algebren ... 26
2. Linkssymmetrische Strukturen auf einfachen Lie-Algebren vom Cartan-Typ ... 33

Kapitel IV. Zur Klassifikation linkssymmetrischer Algebren ... 40

1. Klassifikation in Dimension 2 ... 41
2. Klassifikation in Dimension 3 ... 45

Kapitel V. Linkssymmetrische Strukturen auf der Lie-Algebra $\mathfrak{gl}(n, k)$ ... 55

Literatur ... 62