Lie Algebren und Darstellungstheorie

Dietrich Burde

Vorlesungsskript 2006

Contents

Einleitung

Lie Algebren treten in vielen Teilgebieten der Mathematik und der mathematischen Physik auf, etwa in der Differentialgeometrie, Zahlentheorie, Kombinatorik und Quantenfeldtheorie, um einige wenige Beispiele zu nennen. Ursprüglich wurden Lie Algebren als "infinitesimale Gruppen" von Lie Gruppen bezeichnet. Erst Weyl führte in den 20er Jahren den Begriff einer *Lie Algebra* ein, auf Vorschlag von Jacobson. In der Tat kann man Lie Gruppen, und algebraischen Gruppen, eine Lie Algebra zuordnen, welche ein Vektorraum, nämlich der Tangentialraum an der Eins, mit Lie Klammer ist. Es stellt sich heraus, daß die Beziehungen zwischen Lie Gruppen und Lie Algebren sehr eng sind. Das erlaubt es, viele Probleme über Lie Gruppen zu linearisieren, das heißt, auf dem Niveau von Lie Algebren zu behandeln. Die Lösungen dort lassen sich sehr oft erfolgreich in die Theorie der Lie Gruppen zurückübersetzen.
Wir behandeln in dieser Vorlesung auch die endlich-dimensionale Darstellungstheorie von Lie Algebren. Diese Theorie ist ästhetisch sehr ansprechend, insbesondere für halbeinfache, komplexe Lie Algebren. Dabei kommt man allein mit Methoden der linearen Algebra schon recht weit.
Ein bekanntes Beispiel einer Lie Algebra ist der Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit dem Vektorprodukt als Multiplikation: es gelten die Identitäten

$$\begin{aligned} 0 &= v \times v, \\ 0 &= (u \times v) \times w + (v \times w) \times u + (w \times u) \times v. \end{aligned}$$

Die Darstellungstheorie dieser Lie Algebra spielt auch in der Quantenmechanik eine Rolle (die Theorie des Drehimpuses).
Ich möchte auch ein paar Sätze über die Mathematiker sagen, die man im Zusammenhang mit Lie Algebren erwähnen sollte. Hier ist eine Auswahl solcher Mathematiker:

```
Elie Joseph Cartan (1869-1951)
Claude Chevalley (1909-1984)
Friedrich Engel (1861-1941)
Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851)
Wilhelm Karl Joseph Killing (1847-1923)
Marius Sophus Lie (1842-1899)
Anatoly Ivanovich Malcev (1909-1967)
Hermann Klaus Hugo Weyl (1885-1955)
```

• Elie Cartan war französischer Mathematiker in Montpellier, Lyon, Nancy und Paris. Er war ein Schüler von Marius Sophus Lie. In seiner Dissertation von 1894 vollendete er Killings Klassifikation der endlich-dimensionalen, einfachen, komplexen Lie Algebren. Er begründete unter anderem die Theorie der Riemannschen symmetrischen Räume.

• Claude Chevalley war französischer Mathematiker in Princeton, Columbia University und

Paris. Er bewies fundamentale Resultate in der Theorie der algebraischen Gruppen und in der algebraischen Geometrie. Er schrieb ein 3-bändiges Werk über Lie Gruppen.

• Friedrich Engel war deutscher Mathematiker in Leipzig, Greifswald und Gießen. Er war ein Schüler von Marius Sophus Lie. Lie und Engel schrieben in den 1890er Jahren ein 3-bändiges Werk über Transformationsgruppen.

• Carl Gustav Jacob Jacobi war deutscher Mathematiker in Berlin und Königsberg. Er hat wichtige Beiträge zur Zahlentheorie, partiellen Differentialgleichungen und Determinanten geleistet. Er fand die "Jacobi-Identität" um 1830 im Kontext von Poisson-Klammern, die in der hamiltonschen Mechanik auftreten.

• Wilhelm Killing war deutscher Mathematiker in Münster. Er war Schüler von Weierstraß. Er führte Lie Gruppen im Kontext nichteuklidischer Geometrie ein. Er gab die erste, wenn auch unvollständige Klassifikation der einfachen komplexen Lie Algebren an. Nach dem Tot seiner vier Söhne trat er im Alter von 39 Jahren zusammen mit seiner Frau dem Franziskanerorden bei.

• Sophus Lie war norwegischer Mathematiker in Kristiania (Oslo) und Leipzig. Er begründete die Theorie der stetigen Transformationsgruppen, aus denen sich später das Konzept der Lie Gruppen entwickelte.

• Anatoly Ivanovich Malcev war ein russischer Mathematiker in Moskau und Ivanovo. Er studierte unter anderem auflösbare Gruppen, Lie Gruppen, topologische Algebren und Entscheidbarkeitsprobleme in der Algebra.

• Hermann Weyl war deutscher Mathematiker in Zürich, Göttingen und Princeton. Er emigrierte in der Zeit des dritten Reiches in die USA. Er beschäftigte sich ebenfalls mit Physik. In Zürich war er Kollege von Einstein und Schrödinger. Weyl lieferte zahlreiche fundamentale Beiträge zur Struktur- und Darstellungstheorie kompakter Lie Gruppen.

CHAPTER 1

Allgemeine Theorie von Lie Algebren

1.1. Definitionen und Beispiele

Sei k ein beliebiger Körper und V ein k-Vektorraum. Für drei Elemente $x, y, z \in V$ sei der Assoziator definiert durch

$$(x, y, z) = (x \cdot y) \cdot z - x \cdot (y \cdot z).$$

Definition 1.1.1. Eine *k-Algebra A* ist ein k-Vektorraum mit einer k-bilinearen Abbildung

$$A \times A \to A, \quad (x, y) \mapsto x \cdot y.$$

Die Algebra A heißt *links-symmetrisch*, oder *pre-Lie-Algebra*, falls

$$(x, y, z) = (y, x, z)$$

für alle $x, y, z \in A$ gilt. Sie heißt *assoziativ*, falls

$$(x, y, z) = 0$$

für alle $x, y, z \in A$ gilt.

Eine Lie Algebra ist ein spezieller Typ einer k-Algebra, die nach dem Mathematiker Sophus Lie benannt ist:

Definition 1.1.2. Eine *Lie Algebra* $\mathfrak{g}$ über k ist ein k-Vektorraum, zusammen mit einer k-bilinearen Abbildung, der sogenannten *Lie Klammer*

$$\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}, \quad (x, y) \mapsto [x, y],$$

derart, daß für alle $x, y, z \in \mathfrak{g}$ gilt

$$\begin{aligned} 0 &= [x, x], \\ 0 &= [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]]. \end{aligned}$$

Die erste Bedingung wird *Antisymmetrie* genannt, weil sie die Identität $[y, x] = -[x, y]$ impliziert:

$$\begin{aligned} 0 = [x + y, x + y] &= [x, x] + [x, y] + [y, x] + [y, y] \\ &= [x, y] + [y, x]. \end{aligned}$$

Hätte man die Antisymmetrie direkt als Definition genommen, so hätte man daraus für $y = x$ nur $[x, x] = -[x, x]$ folgern können, also $2[x, x] = 0$. In Charakteristik $p = 2$ könnte

man daraus nicht $[x,x]=0$ folgern. Deshalb zieht man die Definition $[x,x]=0$ vor, wenn man beliebige Körper zuläßt.
Die zweite Bedingung heißt *Jacobi-Identität.* Sie ersetzt in gewisser Weise die Assoziativität, und ist durch "Ableiten" der Gruppenstruktur von Lie Gruppen entstanden.
Für zwei Unterräume $\mathfrak{h},\mathfrak{k}$ von $\mathfrak{g}$ ist $[\mathfrak{h},\mathfrak{k}]$ definiert als der Unterraum, der von allen Produkten $[h,k]$ mit $h\in\mathfrak{h}$ und $k\in\mathfrak{k}$ erzeugt wird. Jedes Element von $[\mathfrak{h},\mathfrak{k}]$ ist eine Summe

$$[h_1,k_1]+\cdots+[h_r,k_r]$$

mit $h_i\in\mathfrak{h},k_i\in\mathfrak{k}$. Die Multiplikation von Unterräumen in einer Lie Algebra ist kommutativ:

Lemma 1.1.3. *Für Unterräume $\mathfrak{h},\mathfrak{k}$ von $\mathfrak{g}$ gilt $[\mathfrak{h},\mathfrak{k}]=[\mathfrak{k},\mathfrak{h}]$.*

Beweis. Es seien $h\in\mathfrak{h},k\in\mathfrak{k}$. Dann ist $[h,k]=-[k,h]\in[\mathfrak{k},\mathfrak{h}]$, also $[\mathfrak{h},\mathfrak{k}]\subseteq[\mathfrak{k},\mathfrak{h}]$. Analog folgt $[\mathfrak{k},\mathfrak{h}]\subseteq[\mathfrak{h},\mathfrak{k}]$. □

Ein Unterraum $\mathfrak{a}$ einer Lie Algebra $\mathfrak{g}$ heißt *Unteralgebra*, bzw. *Ideal*, falls $[\mathfrak{a},\mathfrak{a}]\subseteq\mathfrak{a}$ bzw. $[\mathfrak{g},\mathfrak{a}]=[\mathfrak{a},\mathfrak{g}]\subseteq\mathfrak{a}$ gilt. Die Kommutatoralgebra $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ ist wegen der Jacobi-Identität ein Ideal in $\mathfrak{g}$: man hat $[\mathfrak{g},[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]]\subseteq[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$.
Eine LSA, also insbesondere auch eine assoziative k-Algebra, definiert durch Kommutatorbildung eine Lie Algebra Struktur auf dem gleichen Vektorraum:

Lemma 1.1.4. *Ist A eine LSA mit Produkt $(x,y)\mapsto x\cdot y$, dann ist $(A,[,])$ mit $[x,y]=x\cdot y-y\cdot x$ eine Lie-Algebra.*

Beweis. Die Behauptung folgt sofort aus der Identität

$$[[a,b],c]+[[b,c],a]+[[c,a],b]=$$
$$(a,b,c)+(b,c,a)+(c,a,b)-(b,a,c)-(a,c,b)-(c,b,a),$$

die in jeder k-Algebra gültig ist. □

Beispiel 1.1.5. *Für die assoziative Matrix Algebra $A=M_n(k)$ erhalten wir durch Kommutatorbildung die allgemeine lineare Lie Algebra $\mathfrak{gl}_n(k)$ der Dimension n^2.*

Die Lie Klammer von zwei $n\times n$-Matrizen A,B ist also durch $[A,B]=AB-BA$ gegeben. Für diese Lie Algebra kann man dann die Kommutator Lie Algebra $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ bilden:

Lemma 1.1.6. *Die Kommutatoralgebra von $\mathfrak{gl}_n(k)$ ist die spezielle lineare Lie Algebra*

$$\mathfrak{sl}_n(k)=\{X\in\mathfrak{gl}_n(k)\mid\operatorname{tr}(X)=0\}$$

der Dimension n^2-1.

Beweis. Wir müssen $[\mathfrak{gl}_n(k),\mathfrak{gl}_n(k)]=\mathfrak{sl}_n(k)$ zeigen. Seien $A,B\in\mathfrak{gl}_n(k)$. Dann ist $[A,B]\in\mathfrak{sl}_n(k)$ wegen

$$\operatorname{tr}([A,B])=\operatorname{tr}(AB)-\operatorname{tr}(BA)=0.$$

Damit gilt $[\mathfrak{gl}_n(k),\mathfrak{gl}_n(k)]\subseteq\mathfrak{sl}_n(k)$. Umgekehrt betrachten wir die Matrizen E_{ij}, die an der Stelle (i,j) den Eintrag 1 haben, und sonst nur Nullen. Es gilt

$$[E_{jk},E_{\ell m}]=\delta_{k\ell}E_{jm}-\delta_{jm}E_{\ell k}. \tag{1.1}$$

Insbesondere folgt, für $j \neq k, m$

$$\begin{aligned} [E_{jk}, E_{kj}] &= E_{jj} - E_{kk}, \\ [E_{jm}, E_{mk}] &= E_{jk}. \end{aligned}$$

Diese Matrizen erzeugen aber die Lie Algebra $\mathfrak{sl}_n(k)$, für $j \neq k$. Offenbar sind sie als Kommutatoren darstellbar. Also folgt auch $\mathfrak{sl}_n(k) \subseteq [\mathfrak{gl}_n(k), \mathfrak{gl}_n(k)]$. Es ist auch leicht zu verifizieren, daß die E_{ij} für $i \neq j$ und die $E_{ii} - E_{i+1,i+1}$ für $1 \leq i \leq n-1$ eine Basis von $\mathfrak{sl}_n(k)$ bilden. Das sind $(n^2 - n) + (n-1) = n^2 - 1$ viele Elemente. Also folgt die Dimensionsformel. $\square$

Bemerkung 1.1.7. Die Algebra $\mathfrak{sl}_n(k)$ ist eine Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{gl}_n(k)$, aber keine Unteralgebra der assoziativen Matrixalgebra $M_n(k)$.

Beispiel 1.1.8. *Für eine feste Matrix $J \in \mathfrak{gl}_m(k)$ ist der Unterraum*

$$\mathfrak{g}(J) = \{X \in \mathfrak{gl}_m(k) \mid JX + X^t J = 0\}$$

eine Lie Unteralgebra.

In der Tat gilt, für $X, Y \in \mathfrak{g}(J)$,

$$\begin{aligned} [X,Y]^t J + J[X,Y] &= Y^t X^t J - X^t Y^t J + JXY - JYX \\ &= -Y^t JX + X^t JY + JXY - JYX \\ &= JYX - JXY + JXY - JYX \\ &= 0. \end{aligned}$$

Für $m = 2n$ und

$$J = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix}$$

erhält man die Lie Algebra $\mathfrak{g}(J) = \mathfrak{sp}_{2n}(k)$, die *symplektische Lie Algebra* der Ordnung n. Eine Blockmatrix $M = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right)$ liegt also genau dann in $\mathfrak{sp}_{2n}(k)$, wenn gilt

$$\begin{pmatrix} A^t & C^t \\ B^t & D^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

also

$$\begin{pmatrix} -C^t & A^t \\ -D^t & B^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C & -D \\ A & B \end{pmatrix},$$

also

$$C^t = C, \quad B^t = B, \quad D = -A^t.$$

Die Dimension der symplektischen Lie Algebra ist damit

$$\dim_k \mathfrak{sp}_{2n}(k) = n(n+1) + n^2 = 2n^2 + n.$$

Für $J = E_m$ erhält man die Lie Algebra $\mathfrak{g}(J) = \mathfrak{so}_m(k)$, die *orthogonale Lie Algebra* der Ordnung m. Sie besteht also genau aus allen schiefsymmetrischen Matrizen:

$$\mathfrak{so}_m(k) = \{X \in \mathfrak{gl}_m(k) \mid X + X^t = 0\}.$$

Es gilt $\dim_k \mathfrak{so}_m(k) = m(m-1)/2$. Für spätere Rechnungen ist jedoch noch eine andere Darstellung bequemer, in der man für gerades $m = 2n$ bzw. ungerades $m = 2n+1$ die Matrix J wie folgt wählt:

$$\begin{pmatrix} 0 & E_n \\ E_n & 0 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_n \\ 0 & E_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann hat man zwei Serien orthogonaler Lie Algebren, nämlich $\mathfrak{so}_{2n}(k)$ und $\mathfrak{so}_{2n+1}(k)$. Ihre Dimensionen sind $n(2n-1)$ bzw. $n(2n+1)$. Wir werden noch sehen, warum man diese Aufteilung macht.

Beispiel 1.1.9. *Die Menge der oberen Dreiecksmatrizen der Größe n über k bilden eine Lie Algebra, die mit $\mathfrak{t}_n(k)$ bezeichnet wird.*

Offensichtlich bilden die echten oberen Dreiecksmatrizen in $\mathfrak{t}_n(k)$ eine Lie Unteralgebra. Sie wird mit $\mathfrak{n}_n(k)$ bezeichnet. Die Lie Unteralgebra der Diagonalmatrizen in $\mathfrak{t}_n(k)$ wird mit $\mathfrak{d}_n(k)$ bezeichnet. Man hat

$$\begin{aligned} \mathfrak{d}_n(k) + \mathfrak{n}_n(k) &= \mathfrak{t}_n(k), \\ [\mathfrak{d}_n(k), \mathfrak{n}_n(k)] &= \mathfrak{n}_n(k), \\ [\mathfrak{t}_n(k), \mathfrak{t}_n(k)] &= \mathfrak{n}_n(k). \end{aligned}$$

Die letzte Eigenschaft folgt aus den ersten beiden Eigenschaften. Die Algebra $\mathfrak{n}_3(k)$ heißt die 3-dimensionale *Heisenberg* Lie Algebra. Sie hat eine Basis (X, Y, Z), gegeben durch

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ihre Lie Klammern sind durch $[X, Y] = Z$ bestimmt.

1.2. Derivationen und Darstellungen von Lie Algebren

Definition 1.2.1. Sei A eine k-Algebra und $\mathrm{End}(A)$ der Raum der Vektorraumendomorphismen von A. Eine lineare Abbildung $D \in \mathrm{End}(A)$ heißt *Derivation* von A, falls

$$D(x \cdot y) = D(x) \cdot y + x \cdot D(y)$$

für alle $x, y \in A$ gilt. Die Menge der Derivationen von A wird mit $\mathrm{Der}(A)$ bezeichnet.

Es ist klar, daß $\mathrm{Der}(A)$ ein Unterraum von $\mathrm{End}(A)$ ist.

Beispiel 1.2.2. *Für die $\mathbb{R}$-Algebra $A = C^\infty(\mathbb{R})$ ist die Abbildung $D\colon A \to A$ mit $D(f) = f'$ eine Derivation.*

Das folgt aus der Produktregel.

Beispiel 1.2.3. *Die LSA $A = \mathbb{C}x \oplus \mathbb{C}y$ mit Produkt $x.x = 2x$, $x.y = y$ und $y.x = 0$, $y.y = x$ erfüllt* $\mathrm{Der}(A) = 0$.

Man beachte, daß A eine einfache Algebra ist, d.h., ohne echte zweiseitige Ideale. Die Lie Algebra von A ist durch $[x, y] = y$ gegeben. Sei D eine Derivation von A. Wir machen den

Ansatz $D(x) = \alpha_1 x + \alpha_2 y$ und $D(y) = \alpha_3 x + \alpha_4 y$. Dann ist $D(x.x) = D(x).x + x.D(x)$ äquivalent zu $2\alpha_1 x - \alpha_2 y = 0$, also $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ und $D(x) = 0$. Ebenso folgt

$$\begin{aligned} D(y.y) - D(y).y - y.D(y) &= D(x) - (\alpha_3 x + \alpha_4 y).y - y.(\alpha_3 x + \alpha_4 y) \\ &= -2\alpha_4 x - \alpha_3 y \\ &= 0. \end{aligned}$$

Damit hat man auch $D(y) = 0$ und D ist die Nullabbildung.
Wir bezeichnen die Lie Algebra zu $\mathrm{End}(A)$, unter Kommutatorbildung, mit $\mathfrak{gl}(A)$. Ist $A = k^n$ als Vektorraum, so identifizieren wir $\mathfrak{gl}(A)$ mit $\mathfrak{gl}_n(k)$. Der Unterraum $\mathrm{Der}(A)$ wird unter Kommutatorbildung auch zu einer Lie Algebra:

Lemma 1.2.4. *Für eine k-Algebra A ist $\mathrm{Der}(A)$ eine Lie Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(A)$.*

Beweis. Für $D_1, D_2 \in \mathrm{Der}(A)$ müssen wir zeigen, daß auch $[D_1, D_2] \in \mathrm{Der}(A)$ gilt. Für $x, y \in A$ gilt

$$\begin{aligned} [D_1, D_2](x.y) &= (D_1 D_2)(x.y) - (D_2 D_1)(x.y) \\ &= D_1(D_2(x).y + x.D_2(y)) - D_2(D_1(x).y + x.D_1(y)) \\ &= (D_1 D_2(x)).y + x.(D_1 D_2(y))) + D_2(x).D_1(y) + D_1(x).D_2(y) \\ &- (D_2 D_1(x)).y - x.(D_2 D_1(y)) - D_1(x).D_2(y) - D_2(x).D_1(y) \\ &= [D_1, D_2](x).y + x.[D_1, D_2](y). \end{aligned}$$

Dabei haben wir in der vorletzten Zeile die Terme $D_1(x).D_2(y)$ und $D_2(x).D_1(y)$ hinzugefügt und wieder abgezogen. $\square$

Nun können wir für A aber selbst eine Lie Algebra $\mathfrak{g}$ nehmen. Dann hat man zu $\mathfrak{g}$ auch die Lie Algebra $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$.

Beispiel 1.2.5. *Sei $\mathfrak{r}_2(k) = kx \oplus ky$ die Lie Algebra mit Lie Klammer $[x, y] = y$. Dann ist*

$$\mathrm{Der}(\mathfrak{r}_2(k)) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in k \right\}.$$

Man hat nur eine nicht-triviale Bedingung, nämlich für die Basiselemente x, y,

$$D([x, y]) = [D(x), y] + [x, D(y)].$$

Daraus folgt die Behauptung. Die Lie Algebra $\mathrm{Der}(\mathfrak{r}_2(k))$ ist ebenfalls 2-dimensional mit Basis D_1, D_2 (entsprechend den Wahlen $(\alpha, \beta) = (0, 1)$ bzw. $(\alpha, \beta) = (1, 0)$) und $[D_1, D_2] = D_2$. Mit dieser Basiswahl ist also $\mathrm{Der}(\mathfrak{r}_2(k)) = \mathfrak{r}_2(k)$.
Für folgende Verallgemeinerung von Derivationen siehe [**4**]:

Definition 1.2.6. Eine lineare Abbildung $P\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ heißt *Prederivation* von $\mathfrak{g}$ falls

$$P([x, [y, z]]) = [P(x), [y, z]] + [x, [P(y), z]] + [x, [y, P(z)]]$$

für alle $x, y, z \in \mathfrak{g}$.

Die Menge aller Prederivationen von $\mathfrak{g}$ bildet eine Lie Unteralgebra $\mathrm{Pder}(\mathfrak{g})$ von $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, die die Lie Algebra $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ enthält:

Lemma 1.2.7. *Es gilt $\mathrm{Der}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathrm{Pder}(\mathfrak{g})$.*

Beweis. Sei $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$. Dann folgt

$$D([x,[y,z]]) = [x, D([y,z])] + [D(x),[y,z]]$$

Setzt man darin $D([y,z]) = [D(y),z] + [y, D(z)]$ ein, so erhält man

$$D([x,[y,z]]) = [x,[D(y),z]] + [x,[y,D(z)]] + [D(x),[y,z]].$$

□

Beispiel 1.2.8. *Es gilt* $\mathrm{Pder}(\mathfrak{r}_2(k)) = \mathrm{Der}(\mathfrak{r}_2(k))$*, aber* $\mathrm{Der}(\mathfrak{n}_3(k))$ *ungleich* $\mathrm{Pder}(\mathfrak{n}_3(k)) = \mathfrak{gl}_3(k)$*.*

Die Lie Klammer der Heisenberg Lie Algebra $\mathfrak{n}_3(k)$ ist durch $[x,y] = z$ bestimmt. Dann ist $[[u,v],w] = 0$ für alle $u,v,w \in \mathfrak{n}_3(k)$. Daher ist jeder Term in der Identität von 1.2.6 gleich Null, und somit jedes $P \in \mathfrak{gl}(k^3)$ eine Prederivation. Hingegen besteht $\mathrm{Der}(\mathfrak{n}_3(k))$ aus den linearen Abbildungen $D = (a_{ij})_{1\le i,j\le 3}$ mit $a_{13} = a_{23} = 0$ und $a_{33} = a_{11} + a_{22}$ (es gilt $D(Z) \subseteq Z$, wobei Z das Zentrum ist). Insbesondere hat $\mathfrak{n}_3(k)$ nicht-singuläre Derivationen. Es gibt auch viele Lie Algebren, die nur nilpotente Derivationen haben. Als Beispiel betrachte man die 7-dimensionale Lie Algebra mit Basis $(e_1,\ldots,e_7)$ und Lie Klammern

$$\begin{aligned}
[e_1,e_i] &= e_{i+1}, \quad 2 \le i \le 6,\\
[e_2,e_3] &= e_6 + e_7\\
[e_2,e_4] &= e_7.
\end{aligned}$$

Hier sind alle Derivationen nilpotente Matrizen. Trotzdem gibt es sogar invertierbare Prederivationen, etwa die Diagonalmatrix $\mathrm{diag}(1,3,3,5,5,7,7)$.

Bemerkung 1.2.9. Jede Prederivation einer endlich-dimensionalen halbeinfachen Lie algebra über einem Körper k der Charakteristik Null ist eine Derivation, also eine *innere* Derivation, d.h., $\mathrm{Pder}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Der}(\mathfrak{g}) = \mathrm{ad}(\mathfrak{g})$.

Definition 1.2.10. Ein *Lie-Algebren-Homomorphismus* $\varphi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ ist eine lineare Abbildung mit $\varphi([x,y]) = [\varphi(x),\varphi(y)]$ für alle $x,y \in \mathfrak{g}$. Ist φ bijektiv, spricht man von einem *Lie-Algebren-Isomorphismus.*

Definition 1.2.11. Eine *Darstellung* einer Lie Algebra $\mathfrak{g}$ ist ein Paar (V,ρ) bestehend aus einem k-Vektorraum V und einem Homomorphismus von Lie Algebren $\rho\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$. Ist ρ injektiv, so nennt man die Darstellung *treu.*

Bemerkung 1.2.12. Der Begriff Darstellung meint, daß eine abstrakte Lie Algebra dargestellt wird als eine konkrete Lie Algebra von Matrizen. Das stimmt natürlich so nur für treue Darstellungen und $V = k^n$. Die Begriffsbildung wird aber auf den allgemeineren Kontext der obigen Definition ausgedehnt. Der Satz von **Ado** (bzw. Iwasawa in Charakteristik p) besagt, daß jede endlich-dimensionale Lie Algebra eine endlich-dimensionale treue Darstellung besitzt.

Beispiel 1.2.13. *Die linearen Abbildungen* $\mathrm{ad}(x)\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$*,* $\mathrm{ad}(x)(y) = [x,y]$ *definieren eine Darstellung*

$$\mathrm{ad}\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}), \quad x \mapsto \mathrm{ad}(x).$$

Es gilt nämlich

$$\begin{aligned}[\mathrm{ad}(x),\mathrm{ad}(y)](z)-\mathrm{ad}([x,y])(z) &= [x,[y,z]]-[y,[x,z]]-[[x,y],z]\\ &= [x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]\\ &= 0.\end{aligned}$$

Die Darstellung $\mathrm{ad}\colon \mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ heißt *adjungierte Darstellung* von $\mathfrak{g}$. Tatsächlich ist sie auch eine Darstellung von $\mathfrak{g}$ in die Lie Unteralgebra $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})\subseteq\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$:

SATZ 1.2.14. *Die Endomorphismen* $\mathrm{ad}(x)$ *sind Derivationen von* $\mathfrak{g}$. *Für* $D\in\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ *und* $x\in\mathfrak{g}$ *gilt* $[D,\mathrm{ad}(x)]=\mathrm{ad}(D(x))$. *Deshalb ist* $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ *ein Lie Ideal in* $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$.

BEWEIS. Für $x,y,z\in\mathfrak{g}$ gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}(x)([y,z])-[\mathrm{ad}(x)(y),z]-[y,\mathrm{ad}(x)(z)] &= [x,[y,z]]-[[x,y],z]-[y,[x,z]]\\ &= [x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]\\ &= 0.\end{aligned}$$

Weiterhin hat man

$$\begin{aligned}[D,\mathrm{ad}(x)](y) &= D([x,y])-[x,D(y)]\\ &= [D(x),y]\\ &= \mathrm{ad}(D(x))(y).\end{aligned}$$

□

Wir bemerken, daß der Kern des Homomorphismus $\mathrm{ad}\colon\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ das *Zentrum* von $\mathfrak{g}$ ist:

$$Z(\mathfrak{g})=\{x\in\mathfrak{g}\mid [x,y]=0\ \forall\, y\in\mathfrak{g}\}.$$

Bei dieser Gelegenheit definieren wir auch folgende Begriffe:

DEFINITION 1.2.15. Sei $\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{g}$ eine Teilmenge der Lie Algebra $\mathfrak{g}$. Dann ist der *Zentralisator* von $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{g}$ definiert durch

$$Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})=\{x\in\mathfrak{g}\mid [x,y]=0\ \forall\, y\in\mathfrak{a}\},$$

und der *Normalisator* von $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{g}$ definiert durch

$$N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})=\{x\in\mathfrak{g}\mid [x,y]\in\mathfrak{a}\ \forall\, y\in\mathfrak{a}\}.$$

Beides sind Lie Unteralgebren von $\mathfrak{g}$, und $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ ist das Zentrum von $\mathfrak{g}$.
Um ein Beispiel einer Darstellung zu betrachten, definieren wir $\mathfrak{sl}_2(k)=kx\oplus ky\oplus kh$ abstrakt durch die Lie Klammern $[x,y]=h$, $[x,h]=-2x$ und $[y,h]=2y$.

BEISPIEL 1.2.16. *Die Zuordnung*

$$x\mapsto\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad y\mapsto\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\quad h\mapsto\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}.$$

definiert eine 2*-dimensionale Darstellung von* $\mathfrak{sl}_2(k)$.

Sei $\varphi\colon \mathfrak{sl}_2(k) \to \mathfrak{gl}(k^2)$ die lineare Abbildung, die wie oben auf der Basis (x, y, h) definiert ist. Dann gilt

$$\varphi([x,y]) = \varphi(h) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] = [\varphi(x), \varphi(y)].$$

Ebenso rechnet man auch $\varphi([x,h]) = [\varphi(x), \varphi(h)]$ und $\varphi([y,h]) = [\varphi(y), \varphi(h)]$ nach.

Beispiel 1.2.17. *Die adjungierte Darstellung von $\mathfrak{sl}_2(k)$ ist die 3-dimensionale Darstellung, die durch die folgenden Matrizen gegeben ist:*

$$\mathrm{ad}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{ad}(y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{ad}(h) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die identische Abbildung definiert eine n-dimensionale Darstellung der Lie Algebra $\mathfrak{gl}_n(k)$:

$$\mathrm{id}\colon \mathfrak{gl}_n(k) \to \mathfrak{gl}(k^n).$$

Sie heißt die *natürliche Darstellung*. Dieser Begriff wird auch für jede Unteralgebra $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}_n(k)$ sinngemäß verwendet, siehe Beispiel 1.2.16.

Ist (ρ, V) eine Darstellung der Lie Algebra $\mathfrak{g}$, so erhält man durch $x.v = \rho(x)(v)$ eine bilineare Operation $\mathfrak{g} \times V \to V$, $(x, v) \mapsto x.v$ derart, daß für alle $x, y \in \mathfrak{g}$ und alle $v \in V$ gilt

$$[x,y].v = x.(y.v) - y.(x.v). \tag{1.2}$$

Man nennt V zusammen mit dieser bilinearen Abbildung dann auch einen $\mathfrak{g}$-*Modul*. Wir werden dazu aber oft auch wieder "Darstellung von $\mathfrak{g}$" sagen.

Beispiel 1.2.18. *Die triviale Operation $x.v = 0$ für alle $x \in \mathfrak{g}$, $v \in V$ macht jeden k-Vektorraum V zu einer Darstellung von $\mathfrak{g}$.*

Den Körper k versehen mit der trivialen Operation nennt man die *triviale Darstellung*. Den Nullvektorraum versehen mit der trivialen Operation nennt man die *Nulldarstellung* von $\mathfrak{g}$.

Definition 1.2.19. Eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to W$ zwischen zwei Darstellungen (d.h. Moduln) einer Lie Algebra $\mathfrak{g}$ heißt ein *Homomorphismus von Darstellungen* genau dann, wenn gilt

$$\varphi(x.v) = x.\varphi(v) \quad \forall\, v \in V, x \in \mathfrak{g}.$$

Zwei Darstellungen heißen *isomorph*, wenn es einen Homomorphismus zwischen ihnen gibt, der ein Isomorphismus der Vektorräume ist. Ein Unterraum U einer Darstellung V von $\mathfrak{g}$ heißt eine *Unterdarstellung* genau dann, wenn gilt $x.u \in U$ für alle $x \in \mathfrak{g}, u \in U$.

Beispiel 1.2.20. *Für eine Linearform $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ auf $\mathfrak{g}$ ist die Abbildung $\rho_\lambda\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(k)$ mit $x \mapsto \lambda(x)$ genau dann eine Darstellung, wenn λ auf $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ verschwindet.*

Die Linearformen von $\mathfrak{g}$, die auf $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ verschwinden, nennt man auch *Charaktere von* $\mathfrak{g}$. Man bezeichnet diese 1-dimensionale Darstellung dann mit k_λ. Die Abbildung $\lambda \to k_\lambda$ induziert eine Bijektion von $(\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}])^*$ und den Isomorphieklassen aller 1-dimensionalen Darstellungen von $\mathfrak{g}$.

Definition 1.2.21. Eine Darstellung V einer Lie Algebra heißt *einfach*, oder *irreduzibel*, falls sie nicht Null ist, und ihre einzige echte Unterdarstellung (d.h. ungleich V) die Nulldarstellung ist.

Lemma 1.2.22. *Ist $\varphi\colon V \to W$ ein Homomorphismus von Darstellungen von $\mathfrak{g}$, so ist* $\ker(\varphi)$ *eine Unterdarstellung von V und* $\mathrm{im}(\varphi)$ *eine Unterdarstellung von W.*

Ist $U \subset V$ eine Unterdarstellung von V, so gibt es genau eine Darstellung von $\mathfrak{g}$ auf dem Quotientenraum V/U derart, daß $\pi\colon V \to V/U$, $v \mapsto v + U$ ein Homomorphismus von Darstellungen wird. Man nennt V/U die *Quotientendarstellung*.

Bemerkung 1.2.23. Die Ideale einer Lie Algebra $\mathfrak{g}$ sind genau die Unterdarstellungen der adjungierten Darstellung von $\mathfrak{g}$.

Ist U eine Unterdarstellung von V, so nennt man eine Unterdarstellung $W \subset V$ ein *Komplement* von U in V, falls V die direkte Vektorraumsumme von U und W ist, d.h. $V \cong U \oplus W$. Die Abbildung $U \oplus W \to V$, $(u, w) \mapsto u + w$ ist dann auch ein Isomorphismus von Darstellungen.

Definition 1.2.24. Eine Darstellung V von $\mathfrak{g}$ heißt *halbeinfach*, falls jede Unterdarstellung ein Komplement besitzt.

Eine einfache Darstellung hat nur 0 und V als Unterdarstellungen, und ist deshalb halbeinfach.

Lemma 1.2.25. *Unterdarstellungen und Quotientendarstellungen halbeinfacher Darstellungen sind halbeinfach.*

Beweis. Sei V eine halbeinfache Darstellung und $W \subset V$ eine Unterdarstellung. Wir wollen zuerst zeigen, daß W halbeinfach ist. Sei also $U \subset W$ eine Unterdarstellung. Wir müssen ein Komplement von U in W finden. Weil V halbeinfach ist, gibt es ein Komplement U' von U in V, also $V = U \oplus U'$. Dann ist aber $U' \cap W$ ein Komplement von U in W, weil

$$U \cap (U' \cap W) \subset U \cap U' = \{0\},$$

und wegen $W \subset U + U'$ und $U \subset W$ auch $W \subset U + (U' \cap W)$ gilt. Also hat man $(U' \cap W) \oplus U = W$.
Als zweites zeigen wir, daß auch V/W halbeinfach ist. Sei $\pi\colon V \to V/W$ die kanonische Projektion und W' ein Komplement von W in V. Dann ist $\pi\,|_{W'}\colon W' \to V/W$ ein Isomorphismus von Darstellungen. Da W' wegen des ersten Teils halbeinfach ist, gilt das dann auch für V/W. □

Es gilt nun der folgende wichtige Satz für halbeinfache Darstellungen, auch in unendlicher Dimension (dort benötigt man das Zornsche Lemma im Beweis):

Satz 1.2.26. *Für eine Darstellung V einer Lie Algebra $\mathfrak{g}$ sind folgende Aussagen äquivalent:*
(1) *V ist halbeinfach.*
(2) *V ist Summe einfacher Darstellungen.*
(3) *V ist direkte Summe einfacher Darstellungen.*

Bemerkung 1.2.27. Dieser Satz ist sehr hilfreich, um zu erkennen, ob eine gegebene Darstellung halbeinfach ist. Der Satz besagt außerdem, daß wir uns zur Bestimmung von halbeinfachen Darstellungen von $\mathfrak{g}$ auf die einfachen beschränken können.

Beispiel 1.2.28. *Sei $\mathfrak{g} = \mathbb{C}$ die 1-dimensionale Lie Algebra mit trivialer Lie Klammer und $V = \mathbb{C}^2$ die Darstellung von $\mathfrak{g}$ definiert durch $1.v = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) v$. Dann ist V nicht halbeinfach.*

Wäre V halbeinfach, so wäre V die direkte Summe zweier 1-dimensionaler Darstellungen, denn V ist selbst nicht einfach. Dann gäbe es eine Basis, in der die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ Blockform hätte, d.h., von der Gestalt $\left(\begin{smallmatrix} z & 0 \\ 0 & w \end{smallmatrix}\right)$. Das kann aber nicht sein, weil sie nicht diagonalisierbar ist.

Definition 1.2.29. Für Darstellungen V und W einer Lie Algebra $\mathfrak{g}$ bezeichne $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, W)$ den Raum der Homomorphismen $\varphi\colon V \to W$ von Darstellungen. Wir setzen $\mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(V) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, V)$.

Man sieht, daß $\mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(V)$ eine assoziative Unteralgebra von $\mathrm{End}(V)$ ist. Es bezeichne $\overline{k}$ den algebraischen Abschluß von k.

Satz 1.2.30 (Schursches Lemma). *Für einfache Darstellungen V und W einer Lie Algebra $\mathfrak{g}$ gilt:*

(1) $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, W) = 0$, *falls V und W nicht isomorph sind.*
(2) $\mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(V)$ *ist eine Divisionsalgebra, d.h., jedes von Null verschiedene Element ist invertierbar.*
(3) *Gilt* $\dim_k V < \infty$ *und* $k = \overline{k}$, *so ist* $\mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(V) = k \cdot \mathrm{id}$.

Beweis. Zu (1): Sei $\varphi\colon V \to W$ ein Homomorphismus von $\mathfrak{g}$-Darstellungen. Ist $\varphi \neq 0$, so ist $\varphi(V) \subset W$ eine Unterdarstellung, die von Null verschieden ist. Da W einfach ist, folgt $\varphi(V) = W$. Ebenso sieht man $\ker(\varphi) = 0$ ein. Also ist φ ein Isomorphismus, d.h. $V \cong W$.
Zu (2): Es ist klar, daß $\mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(V)$ eine Algebra ist. Sei $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(V)$ von Null verschieden. Wie unter (1) sieht man, daß φ invertierbar ist.
Zu (3): Sei $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(V)$. Wegen $k = \overline{k}$ hat das charakteristische Polynom $\chi_\varphi(t) = \det(\varphi - t\,\mathrm{id})$ eine Nullstelle $\lambda \in k$. Also gibt es einen Eigenvektor $v \neq 0$ zum Eigenwert λ. Da der Eigenraum $V^\lambda(\varphi)$ von φ zu λ aber eine Unterdarstellung von V ist, folgt $V^\lambda(\varphi) = V$, da V ja einfach ist. Also ist $\varphi = \lambda\,\mathrm{id}$ und somit $\mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(V) = k \cdot \mathrm{id}$. □

Sei k algebraisch abgeschlossen:

Korollar 1.2.31. *Sei $\rho\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ eine einfache Darstellung. Dann sind die einzigen Endomorphismen von V, die mit allen $\rho(x)$, $x \in \mathfrak{g}$ kommutieren, die Skalare, also $\lambda \cdot \mathrm{id}$ mit $\lambda \in k$.*

Beweis. Sei $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ und $x.v = \rho(x)(v)$. Dann ist $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(V)$ wenn $\varphi(x.v) = x.\varphi(v)$ gilt, denn das war die Definition eines $\mathfrak{g}$-Modulhomomorphismus. Mit ρ schreibt sich diese Bedingung als $(\varphi \circ \rho(x))(v) = (\rho(x) \circ \varphi)(v)$. Also kommutiert φ mit allen $\rho(x)$. Aus obigem Satz folgt aber $\mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(V) = k \cdot \mathrm{id}_V$. □

Das Lemma ist i.a. falsch, wenn k nicht algebraisch abgeschlossen ist. Ein Gegenbeispiel ist die einfache Darstellung von $\mathfrak{g} = \mathbb{R}$ im reellen Vektorraum $V = \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, bei der $\lambda \in \mathfrak{g}$ auf V operiert als die Multiplikation mit λi. Dann gilt $\mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(V) = \mathbb{C} \cdot \mathrm{id} \neq \mathbb{R} \cdot \mathrm{id} = k \cdot \mathrm{id}$.

1.3. Semidirekte Summen von Lie Algebren

Haben wir eine Familie $\mathfrak{g}_j$, $j \in J$ von Lie Algebren, so können wir die direkte Summe der Vektorräume $\mathfrak{g}_j$ bilden:

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in J} \mathfrak{g}_j$$

Die Elemente von $\mathfrak{g}$ bezeichnen wir mit (x_j). Dann definiert $[(x_j),(y_j)] = ([x_j,y_j])$ eine Lie Klammer für $\mathfrak{g}$. Diese Lie Algebra heißt *direkte Summe* der Lie Algebren $\mathfrak{g}_j$.

Definition 1.3.1. Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie Algebra, $\mathfrak{a}$ eine Unteralgebra in $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{b}$ ein Ideal von $\mathfrak{g}$, so daß $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$ als Vektorräume. Dann heißt $\mathfrak{g}$ die *innere semidirekte Summe* von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$. Wir schreiben $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \ltimes \mathfrak{b}$.

Man beachte, daß eine semidirekte Summe $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \ltimes \mathfrak{b}$ genau dann direkt ist, wenn beide Summanden Ideale in $\mathfrak{g}$ sind.

Lemma 1.3.2. *Es seien $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zwei Lie Algebren, und $D\colon \mathfrak{a} \to \mathrm{Der}(\mathfrak{b})$ ein Homomorphismus von Lie Algebren. Dann wird auf $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ durch*

$$[(x,a),(y,b)] = ([x,y],[a,b] + D(x)(b) - D(y)(a)) \tag{1.3}$$

eine Lie Klammer definiert. Die Lie Algebra wird mit $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \ltimes_D \mathfrak{b}$ bezeichnet.

Beweis. Es gilt offensichtlich $[(x,a),(x,a)] = (0,0)$. Sei

$$J(x,y,z) = [x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]]$$

für $x,y,z \in \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$. Man beachte $J(x,y,z) = J(y,z,x) = J(z,x,y)$. Wegen der Trilinearität reduziert sich der Nachweis von $J \equiv 0$ auf die vier Fälle

$$\begin{aligned} x,y,z &\in \mathfrak{b}, \\ x,y \in \mathfrak{b}, z &\in \mathfrak{a} \\ x \in \mathfrak{b}, y,z &\in \mathfrak{a} \\ x,y,z &\in \mathfrak{a} \end{aligned}$$

Im ersten und vierten Fall folgt $J \equiv 0$ aus der Tatsache, daß $\mathfrak{b}$ bzw. $\mathfrak{a}$ eine Lie Algebra ist. In den beiden anderen Fällen folgt die Behauptung aus der Tatsache, daß die Bilder von D Derivationen von $\mathfrak{b}$ sind bzw. daß D ein Homomorphismus ist. Die Rechnung sei dem Leser überlassen. □

Definition 1.3.3. Die Lie Algebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \ltimes_D \mathfrak{b}$ heißt äußere semidirekte Summe von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$.

Offensichtlich ist $\mathfrak{a} \times 0 \cong \mathfrak{a}$ eine Unteralgebra in $\mathfrak{g}$, und $0 \times \mathfrak{b} \cong \mathfrak{b}$ ein Ideal in $\mathfrak{g}$. Somit ist $\mathfrak{g}$ auch eine innere direkte Summe von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$. Umgekehrt gilt:

Satz 1.3.4. *Ist $\mathfrak{g}$ eine innere semidirekte Summe von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, und D wie oben, dann ist $\mathfrak{a} \ltimes_D \mathfrak{b} \to \mathfrak{g}$, $(x,a) \to x + a$ ein Isomorphismus von Lie Algebren.*

Bemerkung 1.3.5. Eine semidirekte Summe $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \ltimes \mathfrak{b}$ entspricht einer zerfallenden kurzen exakten Sequenz

$$0 \to \mathfrak{b} \to \mathfrak{g} \xrightarrow{\beta} \mathfrak{a} \to 0.$$

Hierbei heißt die obige Erweiterung *zerfallend*, falls es einen Lie-Algebra Homomorphismus $\tau\colon \mathfrak{a} \to \mathfrak{g}$ gibt mit $\beta \circ \tau = \mathrm{id}_{|\mathfrak{a}}$.

Sei $D\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ eine Darstellung von $\mathfrak{g}$, wobei wir V als eine abelsche Lie Algebra auffassen. Dann ist $\mathrm{Der}(V) = \mathfrak{gl}(V)$. Somit folgt aus (1.3):

Beispiel 1.3.6. *Das semidirekte Produkt $\mathfrak{g} \ltimes V$ wird zu einer Lie Algebra durch*

$$[(x, v), (y, w)] = ([x, y], D(x)(w) - D(y)(v)),$$

für $x, y \in \mathfrak{g}$ und $v, w \in V$.

Für $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(V)$ und $D = \mathrm{id}$ erhalten wir die Lie Algebra

$$\mathfrak{aff}(V) := \mathfrak{gl}(V) \ltimes V$$

mit Lie Klammer $[(A, v), (B, w)] = ([A, B], Aw - Bv)$. Identifizieren wir V mit k^n, so ist $\mathfrak{aff}(V)$ isomorph zu folgender Unteralgebra von $\mathfrak{gl}_{n+1}(k)$:

$$\mathfrak{aff}(V) \cong \left\{ \begin{pmatrix} A & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid A \in GL_n(k),\ v \in k^n \right\}.$$

Die Lie Klammer ist hier durch den Kommutator von Matrizen gegeben:

$$\left[\begin{pmatrix} A & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B & w \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} [A, B] & Aw - Bv \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Lie Algebra $\mathfrak{aff}(V)$ ist die Lie Algebra der Gruppe $\mathrm{Aff}(V)$ der *affinen Transformationen* $L_{A,v}\colon V \to V,\ x \mapsto Ax + v$.

1.4. Einfache, halbeinfache und reduktive Lie Algebren

Definition 1.4.1. Eine Lie Algebra $\mathfrak{g}$ heißt *einfach*, wenn ihre adjungierte Darstellung einfach ist. Sie heißt *reduktiv*, falls die adjungierte Darstellung halbeinfach ist.

Wegen Bemerkung 1.2.23 ist $\mathfrak{g}$ genau dann einfach, wenn $\mathfrak{g}$ nur die Ideale 0 und $\mathfrak{g}$ besitzt, und das Ideal $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ von Null verschieden ist, also $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ gilt. Lie Algebren mit der letzteren Eigenschaft nennt man *perfekt*. Nach Definition ist $\mathfrak{g}$ genau dann reduktiv, wenn es zu jedem Ideal $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{g}$ ein komplementäres Ideal $\mathfrak{b}$ in $\mathfrak{g}$ gibt mit

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}.$$

Bemerkung 1.4.2. Eine Lie Algebra $\mathfrak{g}$ ist genau dann einfach, wenn sie nicht abelsch ist, und jeder von Null verschiedene Homomorphismus von Lie Algebren $\varphi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ injektiv ist.

In der Theorie von Algebren ist eine k-Algebra halbeinfach, wenn sie direkte Summe von einfachen Algebren ist. Da wir aber Lie Algebren mit trivialer Lie Klammer nicht als einfach ansehen, ist eine reduktive Lie Algebra hier nicht unbedingt halbeinfach. (Wie wir bald sehen werden ist eine reduktive Lie Algebra immer direkte Summe einer halbeinfachen und einer "abelschen" Lie Algebra). Deshalb definieren wir:

Definition 1.4.3. Eine Lie Algebra $\mathfrak{g}$ heißt *halbeinfach*, wenn sie eine direkte Summe von einfachen Lie Algebren ist.

Trivialerweise ist jede einfache Lie Algebra auch halbeinfach. Umgekehrt ist jede halbeinfache Lie Algebra auch reduktiv:

Lemma 1.4.4. *Eine halbeinfache Lie Algebra ist perfekt, reduktiv und hat triviales Zentrum.*

Beweis. Sei $\mathfrak{g}$ halbeinfach. Dann gibt es einfache Lie Algebren $\mathfrak{g}_j$ mit $\mathfrak{g} = \bigoplus_{j\in J} \mathfrak{g}_j$. Deswegen, und weil alle $\mathfrak{g}_j$ perfekt sind, folgt

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \bigoplus_{j\in J} [\mathfrak{g}_j, \mathfrak{g}_j] = \bigoplus_{j\in J} \mathfrak{g}_j = \mathfrak{g}.$$

Nun ist jedes $\mathfrak{g}_j$ einfaches Ideal in $\mathfrak{g}$, und damit eine einfache Unterdarstellung der adjungierten Darstellung von $\mathfrak{g}$. Damit ist die adjungierte Darstellung von $\mathfrak{g}$ nach Satz 1.2.26 aber halbeinfach, und somit $\mathfrak{g}$ reduktiv.
Nun ist das $Z(\mathfrak{g}_j)$ von $\mathfrak{g}_j$ ein Ideal, also Null oder $\mathfrak{g}_j$. Letzteres scheidet aus, da $\mathfrak{g}_j$ nicht abelsch ist. Somit ist $Z(\mathfrak{g}_j) = 0$ und deshalb

$$Z(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{j\in J} Z(\mathfrak{g}_j) = 0.$$

□

Nun wollen wir die Struktur reduktiver Lie Algebren noch genauer beschreiben:

Satz 1.4.5. *Sei $\mathfrak{g}$ eine reduktive Lie Algebra. Dann gelten folgende Aussagen:*

(1) *Für eine Ideal $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{g}$ sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ reduktiv.*
(2) *Man hat $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \oplus Z(\mathfrak{g})$, wobei $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ halbeinfach ist.*
(3) *$\mathfrak{g}$ ist genau dann halbeinfach, wenn $Z(\mathfrak{g}) = 0$ ist.*

Beweis. Zu (1): Nach Voraussetzung gibt es ein Ideal $\mathfrak{b}$ in $\mathfrak{g}$ mit $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$. Insbesondere ist $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] = 0$, so daß jedes Ideal von $\mathfrak{a}$ auch ein Ideal von $\mathfrak{g}$ ist. Die Ideale von $\mathfrak{a}$ sind also genau die Unterdarstellungen der adjungierten Darstellung von $\mathfrak{a}$, welche wegen Lemma 1.2.25 halbeinfach ist. Also existiert zu jedem Ideal von $\mathfrak{a}$ ein komplementäres Ideal in $\mathfrak{a}$. Damit ist $\mathfrak{a}$ reduktiv. Wegen $\mathfrak{g}/\mathfrak{a} \cong \mathfrak{b}$ folgt die Reduktivität von $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ aus dem eben genannten Argument, das wir dann auf das Ideal $\mathfrak{b}$ anwenden.
Zu (2): Da die adjungierte Darstellung von $\mathfrak{g}$ halbeinfach ist, hat die Unterdarstellung $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ ein Komplement W, also $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \oplus W$. Wegen $[\mathfrak{g}, W] \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \cap W = 0$ hat man $W \subset Z(\mathfrak{g})$, also $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] + Z(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$. Die Summe ist aber auch direkt. Denn auch die Unterdarstellung $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ ist halbeinfach. Also gibt es ein Komplement U zu $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \cap Z(\mathfrak{g})$, d.h. $U \oplus ([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \cap Z(\mathfrak{g})) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Aber

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = [\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] + Z(\mathfrak{g})] = [\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]] = [\mathfrak{g}, U] \subset U,$$

also $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \cap Z(\mathfrak{g}) = 0$. Es bleibt zu zeigen, daß $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ halbeinfach ist. Die Unterdarstellung $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ der adjungierten Darstellung von $\mathfrak{g}$ ist halbeinfach, also direkte Summe von einfachen Darstellungen $\mathfrak{g}_j$, $j \in J$, welche auch Ideale in $\mathfrak{g}$ sind. Man hat $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] = 0$ für $i, j \in J$. Man sieht, daß die Ideale $\mathfrak{g}_j$ einfach sind.
Zu (3): Ist $Z(\mathfrak{g}) = 0$, dann ist $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ nach (2) halbeinfach. Ist dagegen $\mathfrak{g}$ halbeinfach, so folgt $Z(\mathfrak{g}) = 0$ aus Lemma 1.4.4. □

Satz 1.4.6. *Für einen Körper k der Charakteristik ungleich 2 ist die Lie Algebra $\mathfrak{sl}_2(k)$ einfach.*

Beweis. Sei $\mathfrak{a}$ ein von Null verschiedenes Ideal in $\mathfrak{sl}_2(k)$ und $w \in \mathfrak{a}$ mit $w \neq 0$. Wir schreiben $w = \alpha x + \beta y + \gamma h$ in der Basis (x, y, h) von $\mathfrak{sl}_2(k)$. Wir wollen zeigen, daß $\mathfrak{a} = \mathfrak{sl}_2(k)$ folgt. Wir haben

$$\begin{aligned} [x, [x, w]] &= [x, \beta h - 2\gamma x] = -2\beta x \in \mathfrak{a}, \\ [y, [y, w]] &= -2\alpha y \in \mathfrak{a}. \end{aligned}$$

Ist α ungleich Null, so hat man $y \in \mathfrak{a}$, und dann $h = [x, y] \in \mathfrak{a}$, $\alpha x = w - \beta y - \gamma h \in \mathfrak{a}$, also $\mathfrak{a} = \mathfrak{sl}_2(k)$. Ist β ungleich Null, folgt ganz analog $\mathfrak{a} = \mathfrak{sl}_2(k)$. Für $\alpha = \beta = 0$ hat man $w = \gamma h \in \mathfrak{a}$ mit $\gamma \neq 0$, also $h \in \mathfrak{a}$. Dann folgt sofort $2x = [h, x] \in \mathfrak{a}$ und $2y = [y, h] \in \mathfrak{a}$, und somit auch $\mathfrak{a} = \mathfrak{sl}_2(k)$. □

Wegen $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{C}) = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}$ ist die Lie Algebra $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{C})$ also reduktiv. Allgemeiner gilt

Satz 1.4.7. *Die Lie Algebra $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ ist reduktiv, und ihre Kommutatoralgebra $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ ist einfach.*

Wir beweisen diesen Satz erst später (siehe auch [**10**]). In Charakteristik p ist $\mathfrak{sl}_n(k)$ genau dann einfach, wenn $p \nmid n$ gilt. Wir kommen später noch wesentlich ausführlicher auf einfache und halbeinfache komplexe Lie Algebren zurück.

1.5. Einfache Darstellungen von $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$

Einfache Darstellungen der Dimension $1, 2$ und 3 von $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ sind die triviale Darstellung $\mathbb{C}$, die Standarddarstellung $\mathbb{C}^2$ und die adjungierte Darstellung $\mathbb{C}^3$. Wir klassifizieren nun im folgenden alle einfachen Darstellungen endlicher Dimension von $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Dazu sei $k[X] = k[x_1, \ldots, x_n]$ der Polynomring in n Variablen, und es bezeichne ∂_i die partielle Ableitung nach der Variablen x_i. Dann gilt:

Lemma 1.5.1. *Die lineare Abbildung*

$$\rho\colon \mathfrak{gl}_n(k) \to \mathfrak{gl}(k[X]),$$
$$E_{ij} \mapsto x_i\partial_j$$

ist eine Darstellung von $\mathfrak{gl}_n(k)$ im Polynomring $k[X]$.

Beweis. Für alle Polynome $p \in k[X]$ gilt die Formel

$$x_i\partial_j x_k\partial_\ell(p) = \delta_{jk}x_i\partial_\ell(p) + x_i x_k \partial_j\partial_\ell(p).$$

Es folgt

$$\begin{aligned}[\rho(E_{ij}), \rho(E_{k\ell})] &= [x_i\partial_j, x_k\partial_\ell] \\ &= \delta_{jk}x_i\partial_\ell - \delta_{\ell i}x_k\partial_j \\ &= \rho(\delta_{jk}E_{i\ell} - \delta_{\ell i}E_{kj}) \\ &= \rho([E_{ij}, E_{k\ell}]).\end{aligned}$$

□

Theorem 1.5.2. *In jeder Dimension $n \geq 1$ gibt es bis auf Isomorphie genau eine einfache Darstellung der Lie Algebra $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.*

Beweis. Zuerst konstruieren wir zu jeder Dimension n eine einfache Darstellung. Dann zeigen wir, daß je zwei einfache Darstellungen der Dimension n isomorph sind. Sei (x, y, h) die Standardbasis von $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Lemma 1.5.1 liefert eine Darstellung $\rho\colon \mathfrak{sl}_2(k) \to \mathfrak{gl}(k[X, Y])$ durch

$$\begin{aligned}\rho(x) &= X\partial_Y, \\ \rho(y) &= Y\partial_X, \\ \rho(h) &= X\partial_X - Y\partial_Y.\end{aligned}$$

Diese Darstellung ist nicht endlich-dimensional (und auch nicht einfach). Die Polynome von festem Totalgrad m aber bilden eine Unterdarstellung

$$V(m) = k[X, Y]^m \subset k[X, Y]$$

der Dimension $m + 1$ mit Basis $v_i = Y^i X^{m-i}$ für $i = 0, 1, \ldots m$. In dieser Basis wird die Operation von $\mathfrak{sl}_2(k)$ auf $V(m)$ wie folgt beschrieben:

$$\begin{aligned}x.v_i &= iv_{i-1}, \\ y.v_i &= (m - i)v_{i+1}, \\ h.v_i &= (m - 2i)v_i.\end{aligned}$$

Dabei setzen wir $v_{-1} = v_{m+1} = 0$. Die darstellende Matrix $\rho(h)$ ist durch $\operatorname{diag}(m, m-2, m-4, \ldots, 2-m, -m)$ gegeben. Diese Darstellungen $V(m)$ sind *einfach* in Charakteristik Null: jede von Null verschiedene Unterdarstellung $U \subset V(m)$ enthält notwendig einen Eigenvektor zu h, also eines der v_i, weil ja $h.U \subset U$ nach Definition gilt. Dann folgt aus den Formeln aber sofort $U = V(m)$ (zuerst $v_0 \in U$ durch wiederholte Operation von x, dann $v_1, v_2, \ldots v_m$ durch Operation von y). Damit haben wir in jeder endlich Dimension $m \geq 1$ eine einfache Darstellung gefunden.

Nun zeigen wir noch, daß je zwei einfache Darstellungen der Dimension m isomorph sind. Sei zunächst $\rho\colon \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}(V)$ irgendeine Darstellung. Sei

$$V_\mu = \ker(\rho(h) - \mu\,\mathrm{id})$$

den Eigenraum von $\rho(h)$ zum Eigenwert $\mu \in \mathbb{C}$. Man hat

$$\begin{aligned} h.(x.v) - x.(h.v) &= [h,x].v = 2xv, \\ h.(x.v) &= x.(h+2).v, \end{aligned}$$

und deshalb $x.V_\mu \subset V_{\mu+2}$. Analog sieht man $y.V_\mu \subset V_{\mu-2}$ wegen $h.(y.v) = y.(h-2).v$.
Ist V endlich-dimensional und ungleich Null, so gibt es sicher ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $V_\lambda \neq 0$, aber $V_{\lambda+2} = 0$. Für $v \in V_\lambda$ gilt dann $x.v = 0$ und $h.v = \lambda v$. Dann prüft man mit Induktion die folgenden Formeln (mit $y.(y.v) = y^2.v$ etc.) für alle $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} h.(y^n.v) &= (\lambda - 2n)y^n.v, \\ x.(y^n.v) &= n(\lambda - n + 1)y^{n-1}.v. \end{aligned}$$

Damit ist der von den $y^n.v$ mit $n \geq 0$ aufgespannte Teilraum eine Unterdarstellung. Ist nun V zusätzlich einfach, und $v \neq 0$, so müssen die $y^n.v$ folglich ganz V aufspannen. Gilt $y^n.v \neq 0$, so sind $v, y.v, \ldots, y^n.v$ Eigenvektoren von h zu paarweise verschiedenen Eigenwerten, und damit linear unabhängig. Wegen $\dim V < \infty$ gibt es also ein $d \geq 1$ mit $y^d.v = 0$. Wählt man d kleinstmöglich, so ist $(v, y.v, \ldots, y^{d-1}.v)$ eine Basis von V, also $\dim V = d$. Aus $y^d.v = 0$ folgt auch

$$0 = x.(y^d.v) = d(\lambda - d + 1)y^{d-1}.v,$$

und damit $\lambda = d - 1$, weil wir ja $d \neq 0$ und $y^{d-1}.v \neq 0$ vorausgesetzt hatten. Für jede einfache Dastellung ρ von $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ hängen die Matrizen von $\rho(x), \rho(y)$ und $\rho(h)$ in der Basis $(v, y.v, \ldots, y^{d-1}.v)$ also nur von d ab. Folglich sind je zwei einfache Darstellungen derselben Dimension isomorph. □

Jede einfache Darstellung $V(m)$ der Dimension $m+1$ von $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ zerfällt also unter h in 1-dimensionale Eigenräume zu den Eigenwerten $m, m-2, \ldots, 2-m, -m$. Man schreibt

$$V = V_m \oplus V_{m-2} \oplus \cdots \oplus V_{2-m} \oplus V_{-m}.$$

Bemerkung 1.5.3. Die Lie Algebra $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ ist auch die komplexifizierte Lie Algebra der der Drehgruppe $SO_3(\mathbb{R})$ und ihrer universellen Überlagerung, der Spin-Gruppe S^3, d.h.,

$$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Lie}(SO_3(\mathbb{R})) \cong \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Lie}(S^3).$$

Man kann nun aus Theorem 1.5.2 folgern, daß die Dimension eine Bijektion zwischen den einfachen endlich-dimensionalen stetigen komplexen Darstellungen von S^3 bis auf Isomorphismus und der Menge der natürlichen Zahlen liefert (die von $SO_3(\mathbb{R})$ entsprechen der Menge $\{1, 3, 5, 7, \ldots\}$).

1.6. Abelsche, nilpotente und auflösbare Lie Algebren

Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie Algebra, verschieden von der Nullalgebra, wenn nicht anders gefordert. Wir definieren hier nochmal den Begriff einer abelschen Lie Algebra, obwohl wir ihn schon vorher verwendet haben.

Definition 1.6.1. Eine Lie Algebra $\mathfrak{g}$ heißt *abelsch*, falls $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$ ist.

Eine abelsche Lie Algebra hat also triviales Produkt. Damit hat man einfach nur einen k-Vektorraum, etwa k^n. Man beachte, daß jede abelsche Lie $\mathfrak{g} \neq 0$ nicht halbeinfach, sondern nur reduktiv ist. Wir definieren nun induktiv zwei Folgen von Idealen von $\mathfrak{g}$:

- Die *absteigende Zentralreihe* $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^1 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \ldots, \mathfrak{g}^{i+1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^i]$;
- Die *abgeleitete Reihe* $\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \ldots, \mathfrak{g}^{(i+1)} = [\mathfrak{g}^{(i)}, \mathfrak{g}^{(i)}]$.

Es gilt $\mathfrak{g}^i \subset \mathfrak{g}^{i-1}$ und $\mathfrak{g}^{(i)} \subset \mathfrak{g}^{(i-1)}$. Hierbei sind in der Tat alle $\mathfrak{g}^i$ und alle $\mathfrak{g}^{(i)}$ Ideale in $\mathfrak{g}$, wegen der letzten Aussage des folgenden Lemmas:

Lemma 1.6.2. *Seien $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ Ideale in $\mathfrak{g}$. Dann sind auch $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ und $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ Ideale in $\mathfrak{g}$.*

Beweis. Die ersten beiden Behauptungen sind klar. Die dritte Behauptung folgt aus der Jacobi-Identität. Den Spezialfall $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ hatten wir für das Kommutatorideal schon gezeigt. Man hat

$$\begin{aligned} [\mathfrak{g}, [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]] &\subset [[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}], \mathfrak{b}] + [\mathfrak{a}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{b}]] \\ &\subset [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] + [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] \\ &\subset [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]. \end{aligned}$$

Dabei haben wir $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{a}$ und $[\mathfrak{g}, \mathfrak{b}] \subset \mathfrak{b}$ verwendet. □

Definition 1.6.3. Eine Lie Algebra $\mathfrak{g} \neq 0$ heißt *nilpotent* der Stufe k, falls $\mathfrak{g}^k = 0$ und $\mathfrak{g}^{k-1} \neq 0$ ist. Sie heißt *auflösbar* der Stufe k, falls $\mathfrak{g}^{(k)} = 0$ und $\mathfrak{g}^{(k-1)} \neq 0$ ist.

Die Nullalgebra wird auch als nilpotent angesehen. Abelsche Lie Algebren sind also 1-stufig auflösbar bzw. nilpotent. Wegen $\mathfrak{g}^{(i)} \subset \mathfrak{g}^i$ ist jede nilpotente Lie Algebra auch auflösbar. Ist $\mathfrak{g}$ auflösbar der Stufe k, so erhält man eine Identität von iterierten Lie-Klammern mit 2^k Elementen. Für $k = 3$ bedeutet $\mathfrak{g}^{(3)} = 0$ zum Beipsiel

$$[[[x_1, x_2], [x_3, x_4]], [[x_5, x_6], [x_7, x_8]]] = 0$$

für alle $x_i \in \mathfrak{g}$.

Beispiel 1.6.4. *Die Heisenberg Lie Algebra $\mathfrak{n}_3(k)$ ist 2-stufig nilpotent.*

Das Zentrum von $\mathfrak{n}_3(k)$ ist 1-dimensional. Hat k die Charakteristik 2, so ist $\mathfrak{sl}_2(k) = \mathfrak{n}_3(k)$ also nilpotent.

Beispiel 1.6.5. *Die Lie Algebra $\mathfrak{t}_n(k)$ der oberen Dreiecksmatrizen ist auflösbar, und ihre Kommutatoralgebra $\mathfrak{n}_n(k)$ ist nilpotent.*

Lemma 1.6.6. *Für $r, s \in \mathbb{N}$ gilt $[\mathfrak{g}^r, \mathfrak{g}^s] \subset \mathfrak{g}^{r+s+1}$.*

Beweis. Wir machen eine vollständige Induktion nach $r \geq 0$. Für $r = 0$ gilt die Behauptung nach Definition. Der Induktionsschluß folgt so:

$$\begin{aligned} [\mathfrak{g}^{r+1}, \mathfrak{g}^s] &= [[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^r], \mathfrak{g}^s] \\ &\subset [[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^s], \mathfrak{g}^r] + [\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}^s, \mathfrak{g}^r]] \\ &\subset [\mathfrak{g}^r, \mathfrak{g}^{s+1}] + [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{r+s+1}] \\ &\subset \mathfrak{g}^{r+s+2} + \mathfrak{g}^{r+s+2} \\ &\subset \mathfrak{g}^{r+s+2}. \end{aligned}$$

□

BEMERKUNG 1.6.7. Eine Lie Algebra $\mathfrak{g}$ heißt *residuell nilpotent*, falls

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{g}^n = 0.$$

Ist $\mathfrak{g}$ endlich-dimensional, so bedeutet das das gleiche wie nilpotent. Im allgemeinen ist eine residuell nilpotente Lie Algebra nicht notwendig nilpotent.

SATZ 1.6.8. *Sei $\mathfrak{g}$ eine nilpotente Lie Algebra. Dann gelten folgende Aussagen:*

(1) *Für ein Ideal $\mathfrak{a} \neq 0$ in $\mathfrak{g}$ gilt $\mathfrak{a} \cap Z(\mathfrak{g}) \neq 0$. Insbesondere ist $Z(\mathfrak{g}) \neq 0$.*
(2) *Jede Lie Unteralgebra und jedes homomorphe Bild von $\mathfrak{g}$ ist nilpotent.*
(3) *Ist*

$$0 \to \mathfrak{a} \to \mathfrak{h} \to \mathfrak{g} \to 0$$

eine kurze exakte Sequenz von Lie Algebren mit $\mathfrak{a} \subset Z(\mathfrak{h})$ und $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{h}/\mathfrak{a}$ nilpotent, so ist $\mathfrak{h}$ nilpotent.

BEWEIS. Zu (1): $\mathfrak{g}$ operiert auf $\mathfrak{a}$ durch die adjungierte Darstellung, weil $\mathfrak{a}$ ein Ideal in $\mathfrak{g}$ ist: $\mathfrak{g} \times \mathfrak{a} \to \mathfrak{a}$. Lemma 1.6.13 wird uns ein $v \neq 0$ in $\mathfrak{a}$ liefern mit $0 = \mathfrak{g}.v = [\mathfrak{g}, v]$, also mit $v \in \mathfrak{a} \cap Z(\mathfrak{g})$. Man kann allerdings direkt einsehen, daß $\mathfrak{g}$ nicht-triviales Zentrum hat. Ist $\mathfrak{g}$ nilpotent der Stufe k, so ist $\mathfrak{g}^{k-1} \neq 0$ und $\mathfrak{g}^k = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{k-1}] = 0$, also $\mathfrak{g}^{k-1} \subset Z(\mathfrak{g})$.
Zu (2): Ist $\mathfrak{a}$ eine Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ so folgt $\mathfrak{a}^n \subset \mathfrak{g}^n$ für alle $n \geq 0$. Also ist auch $\mathfrak{a}$ nilpotent. Ist $\varphi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ ein surjektiver Lie Algebra Homomorphismus, so gilt $\varphi(\mathfrak{g}^n) = \mathfrak{h}^n$. Also ist auch $\mathfrak{h}$ nilpotent.
Zu (3): Sei $\pi\colon \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}/\mathfrak{a}$ die Quotientenabbildung. Da $\mathfrak{h}/\mathfrak{a}$ nilpotent ist, existiert ein $n \geq 1$ mit $(\mathfrak{h}/\mathfrak{a})^n = 0$. Wegen (2) ist daher $\pi(\mathfrak{h}^n) = (\mathfrak{h}/\mathfrak{a})^n = 0$. Also ist $\mathfrak{h}^n \subset \mathfrak{a} \subset Z(\mathfrak{h})$, und somit $\mathfrak{h}^{n+1} \subset [\mathfrak{h}, Z(\mathfrak{h})] = 0$. □

Zu Punkt (3) ist folgendes zu bemerken. Sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{h}/\mathfrak{a}$ nilpotent, so muß nicht notwendig auch $\mathfrak{h}$ nilpotent sein. Man kann nämlich auf die Forderung $\mathfrak{a} \subset Z(\mathfrak{h})$ im allgemeinen nicht verzichten. Man sagt auch, daß Nilpotenz keine Erweiterungseigenschaft von Lie Algebren ist.

BEISPIEL 1.6.9. *Sei $\mathfrak{h} = \mathfrak{r}_2(k)$ mit $[x, y] = y$ und $\mathfrak{a} = ky$ ein Ideal in $\mathfrak{h}$. Dann sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{h}/\mathfrak{a}$ nilpotent, aber $\mathfrak{h}$ nicht nilpotent.*

In der Tat, $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{h}/\mathfrak{a}$ sind 1-dimensional und damit abelsch, also nilpotent. Dagegen gilt $\mathfrak{h}^n = ky$ für alle $n \geq 1$. Also ist $\mathfrak{h}$ nicht nilpotent.

LEMMA 1.6.10. *Sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ nilpotente Ideale in $\mathfrak{g}$, so ist auch das Ideal $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ nilpotent.*

BEWEIS. Wir zeigen, daß

$$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})^{2m} \subset \mathfrak{a}^m + \mathfrak{b}^m$$

für alle $m \geq 0$ gilt. Dann folgt die Behauptung, wenn man m so groß wählt, daß $\mathfrak{a}^m = \mathfrak{b}^m = 0$ ist. Der Fall $m = 0$ ist klar. Ist nun

$$y := [x_1, [x_2, [x_3, \ldots, [x_{2m}, x_{2m+1}] \cdots]]] \in (\mathfrak{a} + \mathfrak{b})^{2m}$$

so dürfen wir $x_j \in \mathfrak{a} \cup \mathfrak{b}$ annehmen. Sind mindestens $m + 1$ der x_j in $\mathfrak{a}$, so ist $y \in \mathfrak{a}^m$. Ist das nicht der Fall, so sind mindestens $m + 1$ der x_j in $\mathfrak{b}$ und daher $y \in \mathfrak{b}^m$. Da man jedes Element von $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})^{2m}$ als Summe von Elementen der Gestalt von y schreiben kann, folgt daraus die Behauptung. □

Für eine endlich-dimensonale Lie Algebra existiert demnach ein maximales nilpotentes Ideal: ist $\mathfrak{n}$ ein nilpotentes Ideal maximaler Dimension in $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{a}$ irgendein nilpotentes Ideal in $\mathfrak{g}$, so ist $\mathfrak{a}+\mathfrak{n}$ ebenfalls ein nilpotentes Ideal. Dann folgt $\mathfrak{n}=\mathfrak{n}+\mathfrak{a}$ aus Dimensionsgründen. Das bedeutet $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{n}$, so daß $\mathfrak{n}$ jedes nilpotente Ideal enthält, also maximal ist. Insbesondere ist es auch eindeutig bestimmt. Wir können also definieren:

Definition 1.6.11. Sei $\mathfrak{g}$ eine endlich-dimensonale Lie Algebra. Dann heißt das maximale nilpotente Ideal in $\mathfrak{g}$ das *Nilradikal* von $\mathfrak{g}$, und wird mit $\mathrm{nil}(\mathfrak{g})$ bezeichnet.

Lemma 1.6.12. *Sei V ein $\mathfrak{g}$-Modul und $\mathfrak{a}$ ein Ideal in $\mathfrak{g}$. Dann ist*

$$V^{\mathfrak{a}}=\{v\in V\mid \mathfrak{a}.v=0\}$$

ein Untermodul von V.

Beweis. Sei $w\in V^{\mathfrak{a}}$, $x\in\mathfrak{g}$ und $y\in\mathfrak{a}$. Dann ist $[y,x]\in\mathfrak{a}$ und

$$y.(x.w)=[y,x].w+x.(y.w)=0.$$

Also ist auch $x.w\in V^{\mathfrak{a}}$. □

Lemma 1.6.13. *Sei $V\neq 0$ ein Vektorraum über einem beliebigen Körper und $\mathfrak{g}\leq\mathfrak{gl}(V)$ eine endlich-dimensionale Unteralgebra, so daß jedes Element in $\mathfrak{g}$ ein nilpotenter Endomorphismus von V ist. Dann gibt es ein $v\in V$, $v\neq 0$, mit $\mathfrak{g}.v=0$.*

Beweis. Sei $x\in\mathfrak{gl}(V)$ ein nilpotenter Endomorphismus. Dann ist auch $\mathrm{ad}(x)\in\mathrm{End}(\mathfrak{gl}(V))$ nilpotent. In der Tat ist $\mathrm{ad}(x)^n(y)$ für alle $y\in\mathfrak{gl}(V)$ eine Linearkombination von Ausdrücken der Gestalt x^iyx^{n-i}. Somit folgt aus $x^n=0$ also $\mathrm{ad}(x)^{2n}=0$. Allgeiner gilt für x,y in einer assoziativen Algebra

$$(\mathrm{ad}(x))^n(y)=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^{n-i}x^iyx^{n-i}.$$

Wir zeigen nun das Lemma durch Induktion über $\dim\mathfrak{g}$. Der Fall $\dim\mathfrak{g}=0$ ist klar. Wir dürfen also annehmen, daß die Behauptung für alle Lie Algebren $\mathfrak{h}$ mit $\dim\mathfrak{h}<\dim\mathfrak{g}$ gilt.
(1): Wir behaupten, daß für jede echte Unteralgebra $\mathfrak{h}$ von $\mathfrak{g}$ der Normalisator $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ echt größer als $\mathfrak{h}$ ist. Dazu betrachten wir den kanonischen Homomorphismus $\rho\colon\mathfrak{h}\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$ mit $\rho(x)(y+\mathfrak{h})=[x,y]+\mathfrak{h}$. Dadurch wird der Quotientenvektorraum $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ zu einem $\mathfrak{h}$-Modul. Da $x\in\mathfrak{h}$ nilpotent ist, ist auch $\mathrm{ad}(x)$ nilpotent. Daher existiert für jedes $x\in\mathfrak{h}$ ein $n\geq 1$ mit $\mathrm{ad}(x)^n=0$, also auch mit $\rho(x)^n=0$. Wegen $\dim\mathfrak{h}<\dim\mathfrak{g}$ können wir die Voraussetzung auf die Lie Unteralgebra $\rho(\mathfrak{h})$ von $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$ anwenden: Es gibt es $\overline{v}\in\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, $\overline{v}\neq\overline{0}$ mit $(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}).\overline{v}=0$. Also gibt es ein $v\in\mathfrak{g}\setminus\mathfrak{h}$ mit $\rho(\mathfrak{h})(v+\mathfrak{h})=0$, also mit $[v,\mathfrak{h}]\subset\mathfrak{h}$. Also ist $v\in N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})\setminus\mathfrak{h}$.
(2): Wir behaupten, daß $\mathfrak{g}$ ein Ideal $\mathfrak{a}$ der Kodimension 1 enthält: dazu sei $\mathfrak{a}$ eine echte Unteralgebra in $\mathfrak{g}$ von maximaler Dimension. Dann ist $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$ nach (1) echt größer als $\mathfrak{a}$, also gleich $\mathfrak{g}$. Somit ist $\mathfrak{a}$ sogar ein Ideal in $\mathfrak{g}$. Für $x\in\mathfrak{g}\setminus\mathfrak{a}$ ist auch $\mathfrak{a}+kx$ eine Unteralgebra von $\mathfrak{g}$, also $\mathfrak{g}=\mathfrak{a}+kx$. Damit hat $\mathfrak{a}$ aber die Kodimension 1.
(3): Wir können nun die Voraussetzung auf $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{gl}(V)$ anwenden. Es folgt

$$V^{\mathfrak{a}}=\{v\in V\mid\mathfrak{a}.v=0\}\neq 0.$$

Nach Lemma 1.6.12 ist dieses ein $\mathfrak{g}$-Untermodul von V. Für $x\in\mathfrak{g}\setminus\mathfrak{a}$ ist x eingeschränkt auf $V^{\mathfrak{a}}$ ein nilpotenter Endomorphismus von $V^{\mathfrak{a}}$. Also existiert wieder nach Voraussetzung ein $w\in V^{\mathfrak{a}}\setminus 0$ mit $x.w=0$. Wegen $\mathfrak{g}=\mathfrak{a}+kx$ ist dann zusammen $\mathfrak{g}.w=0$. Das war zu zeigen. □

Unter den Voraussetzungen von Lemma 1.6.13 folgt:

Korollar 1.6.14. *Es gibt in V eine Kette von Unterräumen*

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_n = V$$

mit $\dim V_i = i$ *und* $\mathfrak{g}.V_i = V_{i-1}$ *für* $i = 1, \ldots, n$.

Also gibt es eine Basis von V, bezüglich welcher die Matrizen von Elementen in $\mathfrak{g}$ alle echte obere Dreiecksmatrizen sind. Ist $\mathfrak{g}$ nun keine lineare Lie Algebra, so können wir eine Darstellung ρ von $\mathfrak{g}$ betrachten, zum Beispiel die adjungierte Darstellung. Das Bild $\rho(\mathfrak{g})$ ist dann wieder eine lineare Lie Algebra.

Definition 1.6.15. Eine Darstellung $\rho\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ heißt *nilpotent*, falls ein n existiert mit $\rho(x_1) \cdots \rho(x_n) = 0$ für alle $x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{g}$.

Wir schreiben dann auch $\rho(\mathfrak{g})^n = 0$. Die adjungierte Dartsellung von $\mathfrak{g}$ ist genau dann nilpotent, wenn $\mathfrak{g}$ nilpotent ist.

Lemma 1.6.16. *Eine Darstellung $\rho\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ ist genau dann nilpotent, wenn es eine Basis von V gibt, so daß die Matrizen aller $\rho(x)$ echte obere Dreiecksgestalt haben.*

Theorem 1.6.17 (Engel). *Sei $\rho\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ eine endlich-dimensionale Darstellung, für die alle $\rho(x)$ nilpotente Endomorphismen sind. Dann ist ρ eine nilpotente Darstellung.*

Beweis. Wir machen Induktion über $\dim V$. Der Fall $\dim V = 1$ ist klar, denn jede nilpotente lineare Abbildung eines 1-dimensionalen Vektorraums ist identisch Null. Zum Induktionsschluß. Wegen Lemma 1.6.13 ist $V^{\mathfrak{g}} \neq 0$ und somit $V^{\mathfrak{g}}$ ein nicht-trivialer Untermodul von V mit Quotientenmodul $V/V^{\mathfrak{g}}$. Sei $\overline{\rho}\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V/V^{\mathfrak{g}})$ die induzierte Darstellung von $\mathfrak{g}$ auf $V/V^{\mathfrak{g}}$. Dann sind auch die Endomorphismen $\overline{\rho}(x)$ nilpotent, und wir können die Voraussetzung auf $V/V^{\mathfrak{g}}$ anwenden: die Darstellung $\overline{\rho}$ ist nilpotent, d.h., $\overline{\rho}(\mathfrak{g})^n.(V/V^{\mathfrak{g}}) = 0$. Das bedeutet $\rho(\mathfrak{g})^n.V \subset V^{\mathfrak{g}}$ und somit $\rho(\mathfrak{g})^{n+1}.V = 0$. $\square$

Für $\rho = \mathrm{ad}$ folgt:

Korollar 1.6.18 (Engel). *Eine endlich-dimensionale Lie Algebra $\mathfrak{g}$ über k ist genau dann nilpotent, wenn jeder Endomorphismus* $\mathrm{ad}(x)$ *für $x \in \mathfrak{g}$ nilpotent ist.*

Nun kommen wir zu auflösbaren Lie Algebren. Analog zu Satz 1.6.8 haben wir folgendes Resultat:

Satz 1.6.19. *Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie Algebra. Dann gilt:*

(1) *Ist $\mathfrak{g}$ auflösbar, so sind auch alle Unteralgebren und homomorphen Bilder von $\mathfrak{g}$ auflösbar.*
(2) *Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal von $\mathfrak{g}$. Sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ auflösbar, so ist auch $\mathfrak{g}$ auflösbar. Auflösbarkeit ist also eine Erweiterungseigenschaft: man betrachte die kurze exakte Sequenz von Lie Algebren*
$$0 \to \mathfrak{a} \to \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{a} \to 0.$$
(3) *Sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ auflösbare Ideale in $\mathfrak{g}$, so ist auch das Ideal $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ auflösbar.*

Beweis. Zu (1): Ist $\mathfrak{a}$ eine Unteralgebra von $\mathfrak{g}$, so gilt $\mathfrak{a}^{(m)} \subset \mathfrak{g}^{(m)}$. Ist $\mathfrak{g}^{(m)} = 0$, so auch $\mathfrak{a}^{(m)} = 0$. Ist $\varphi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ ein surjektiver Homomorphismus, so erhalten wir induktiv $\varphi(\mathfrak{g}^{(n)}) = \mathfrak{h}^{(n)}$, und somit $\mathfrak{h}^{(n)} = 0$, falls $\mathfrak{g}^{(n)} = 0$.
Zu (2): Sei $\pi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ die Quotientenabbildung. Es gilt $\pi(\mathfrak{g}^{(n)}) = (\mathfrak{g}/\mathfrak{a})^{(n)}$, weil π surjektiv ist. Ist also $(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})^{(n)} = 0$, so folgt $\mathfrak{g}^{(n)} \subset \mathfrak{a}$, und weiter $\mathfrak{g}^{(n+m)} \subset \mathfrak{a}^{(m)} = 0$ für ein $m \geq 0$, weil $\mathfrak{a}$ auflösbar ist. Folglich ist auch $\mathfrak{g}$ auflösbar.
Zu (3): Nach Voraussetzung und Teil (1) ist $\mathfrak{b}/(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \cong (\mathfrak{a} + \mathfrak{b})/\mathfrak{a}$ auflösbar. Wegen (2) ist deshalb auch $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ auflösbar. $\square$

Im Gegensatz zum nilpotenten Fall muß eine auflösbare Lie Algebra kein nicht-triviales Zentrum haben. Zum Beispiel gilt $Z(\mathfrak{r}_2(k)) = 0$.
Teil (3) des obigen Satzes impliziert, daß es in jeder endlich-dimensionalen Lie Algebra $\mathfrak{g}$ ein größtes auflösbares Ideal gibt.

Definition 1.6.20. Sei $\mathfrak{g}$ eine endlich-dimensionale Lie Algebra. Das größte auflösbare Ideal in $\mathfrak{g}$ heißt das *auflösbare Radikal* von $\mathfrak{g}$ und wird mit $\operatorname{rad}(\mathfrak{g})$ bezeichnet.

Lemma 1.6.21. *Für jede endlich-dimensionale Lie Algebra $\mathfrak{g}$ gilt*

$$\operatorname{rad}(\mathfrak{g}/\operatorname{rad}(\mathfrak{g})) = 0.$$

Beweis. Sei $\pi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\operatorname{rad}(\mathfrak{g})$ die Quotientenabbildung und $\mathfrak{a}$ ein auflösbares Ideal in $\mathfrak{g}/\operatorname{rad}(\mathfrak{g})$. Nun ist $\operatorname{rad}(\mathfrak{g}) \subset \pi^{-1}(\mathfrak{a})$ ein auflösbares Ideal mit auflösbarem Quotient

$$\pi^{-1}(\mathfrak{a})/\operatorname{rad}(\mathfrak{g}) = \pi(\pi^{-1}(\mathfrak{a})) = \mathfrak{a}.$$

Daher ist $\pi^{-1}(\mathfrak{a})$ selbst ein auflösbares Ideal von $\mathfrak{g}$, also $\pi^{-1}(\mathfrak{a}) \subset \operatorname{rad}(\mathfrak{g})$. Es folgt $\mathfrak{a} = \pi(\pi^{-1}(\mathfrak{a})) = 0$ in $\mathfrak{g}/\operatorname{rad}(\mathfrak{g})$. □

Lemma 1.6.22. *Ist $\mathfrak{g}$ halbeinfach, so folgt* $\operatorname{rad}(\mathfrak{g}) = 0$.

Beweis. Da Ideale halbeinfacher Lie Algebren auch halbeinfach sind, ist $\operatorname{rad}(\mathfrak{g})$ halbeinfach, also perfekt: $\operatorname{rad}(\mathfrak{g})^{(1)} = \operatorname{rad}(\mathfrak{g})$. Zugleich ist $\operatorname{rad}(\mathfrak{g})$ auch auflösbar. Also gibt es ein $n \geq 0$ mit $0 = \operatorname{rad}(\mathfrak{g})^{(n)} = \operatorname{rad}(\mathfrak{g})$. □

Wir wollen jetzt den Satz von Lie beweisen, das Analogon des Satzes von Engel für auflösbare Lie Algebren. Das folgende Lemma enthält Lemma 1.6.12 als Spezialfall, für $\chi = 0$:

Lemma 1.6.23. *Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathfrak{g}$-Modul in Charakteristik Null, $\mathfrak{a}$ ein Ideal in $\mathfrak{g}$ und $\chi \in \mathfrak{a}^* = \operatorname{Hom}(\mathfrak{a}, k)$. Dann ist*

$$V^\chi = \{v \in V \mid h.v = \chi(h)v \ \ \forall\, h \in \mathfrak{a}\}$$

ein $\mathfrak{g}$-Untermodul. Für ein χ mit $V^\chi \neq 0$ gilt $\chi([\mathfrak{a}, \mathfrak{g}]) = 0$.

Beweis. Sei $x \in \mathfrak{g}$, $h \in \mathfrak{a}$ und $0 \neq v \in V^\chi$. Definiere Räume $V_m = \operatorname{span}\{v, x.v, \ldots, x^{m-1}.v\}$ für $m \geq 1$ und $V_0 = 0$. Dann gilt $x.V_m \subset V_{m+1}$. Wegen $\dim V < \infty$ gibt es ein minimales n mit $V_n = V_{n+1}$. Dann ist $x.V_n \subset V_n$ und somit $V_m = V_n$ für $m \geq n$. Es ist $(v, x.v, \ldots, x^{n-1}.v)$ eine Basis von V_n. Mit Induktion über j wollen wir

$$h.(x^j.v) - \chi(h)x^j.v \in V_j \tag{1.4}$$

zeigen. Daraus folgt dann $h.V_{j+1} \subset V_{j+1}$ für alle $j \geq 0$. Zum Induktionsanfang $j = 0$: Dann ist $V_1 = \operatorname{span}\{v\}$ und (1.4) gilt wegen $v \in V^\chi$. Für $j \geq 1$ gilt $h.(x^{j-1}.v) = \chi(h)x^{j-1}.v + V_{j-1}$ und $\mathfrak{a}.V_j \subset V_j$ nach Induktionsvoraussetzung. Zudem gilt $x.V_{j-1} \subset V_j$. Also folgt

$$\begin{aligned} h.(x^j.v) &= x.(h.(x^{j-1}.v)) + [h, x].(x^{j-1}.v) \\ &\in (\chi(h)x^j.v + x.V_{j-1}) + \mathfrak{a}.V_j \\ &\subset \chi(h)x^j.v + V_j. \end{aligned}$$

Damit ist (1.4) gezeigt. Es folgt, daß $h \in \mathfrak{a}$ durch Endomorhismen $\rho(h)$ von V_n operiert, die bezüglich obiger Basis obere Dreiecksgestalt haben mit Diagonaleinträgen $\chi(h)$. Also folgt

$\mathrm{tr}(\rho(h)) = n\chi(h)$. Für Elemente der Form $[x,h] \in \mathfrak{a}$ folgt

$$\begin{aligned} n\chi([x,h]) &= \mathrm{tr}(\rho([x,h])) \\ &= \mathrm{tr}([\rho(x),\rho(h)]) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Wegen $\mathrm{char}(k) = 0$ folgt $\chi([h,x]) = 0$ (es würde auch $\mathrm{char}(k) > \dim V$ genügen). Für $w \in V^\chi$ müssen wir nun noch $x.w \in V^\chi$ zeigen. Das folgt aber nun aus

$$\begin{aligned} h.(x.w) &= x.(h.w) + [h,x].w \\ &= \chi(h)x.w + \chi([h,x]).w \\ &= \chi(h)x.w. \end{aligned}$$

□

Lemma 1.6.24. *Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik Null, V ein endlich-dimensionaler k-Vektorraum und $\mathfrak{g}$ eine auflösbare Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(V)$. Ist $V \neq 0$, so existiert ein $v \neq 0$ in V mit $\mathfrak{g}.v \subset kv$.*

Beweis. Wir machen eine Induktion über $\dim \mathfrak{g}$. Für $\mathfrak{g} = 0$ ist nichts zu zeigen. Es sei $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ ein Unterraum der Kodimension 1, der $\mathfrak{g}^1$ enthält. So einen Unterraum gibt es, weil $\mathfrak{g}$ auflösbar ist und deshalb $\mathfrak{g}^1 \neq \mathfrak{g}$ ist. Jeder Unterraum, der $\mathfrak{g}^1$ enthält, ist ein Ideal: denn $\mathfrak{a}/\mathfrak{g}^1$ ist ein Ideal in $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}^1$, weil $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}^1$ abelsch ist. Folglich ist auch $\mathfrak{a}$ ein Ideal in $\mathfrak{g}$. Nach Induktionsvoraussetzung finden wir ein $v \in V$, $v \neq 0$ mit $\mathfrak{a}.v \subset kv$. Sei nun $\chi \in \mathfrak{a}^*$ mit $h.v = \chi(h).v$ für alle $h \in \mathfrak{a}$. Dann ist V^χ ein $\mathfrak{g}$-Untermodul nach Lemma 1.6.23. Wähle $x \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{a}$ beliebig. Dann ist $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} + kx$. Es gibt einen Eigenvektor w für x in V^χ, weil k algebraisch abgeschlossen ist. Zusammen folgt $\mathfrak{g}.w \subset \mathfrak{a}.w + kx.w \subset kw$, weil V^χ ein $\mathfrak{g}$-Untermodul ist. □

Satz 1.6.25 (Lie). *Sei $\mathfrak{g}$ eine auflösbare Lie Algebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k der Charakteristik Null. Ist $\rho\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ eine (endlich-dimensionale) Darstellung von $\mathfrak{g}$, so besitzt V eine Basis, bezüglich welcher alle Endomorphismen $\rho(x)$ für $x \in \mathfrak{g}$ durch obere Dreiecksmatrizen dargestellt werden.*

Beweis. Wir machen eine Induktion über $\dim V$. Genauer zeigen wir, daß es in V eine $\mathfrak{g}$-invariante Fahne $0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n = V$ gibt mit $\dim V_j = j$. Wählt man die Basiselemente für V als $v_i \in V_i$, so folgt die Behauptung wegen $\rho(x)(V_i) \subset V_i$. Für $V = 0$ ist nichts zu zeigen. Sei also $\dim V \geq 1$. Nach Lemma 1.6.24 gibt es ein $v \in V$, $v \neq 0$ mit $\mathfrak{g}.v \subset kv$. Das bedeutet, daß $W = kv$ ein 1-dimensionaler $\mathfrak{g}$-Untermodul ist. Wenden wir die Induktionsvoraussetzung auf den Quotientenmodul V/W an, so finden wir darin eine $\mathfrak{g}$-invariante Fahne $0 = W_1 \subset \cdots \subset W_n$ mit $\dim W_j = j - 1$. Ist $\pi\colon V \to V/W$ die Quotientenabbildung, so definiert $V_0 = 0$ und $V_j = \pi^{-1}(W_j)$ eine $\mathfrak{g}$-invariante Fahne in V mit $\dim V_j = j$. □

Korollar 1.6.26. *Sei $\mathfrak{g}$ eine auflösbare Lie Algebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k der Charakteristik Null. Dann ist jede einfache Darstellung von $\mathfrak{g}$ 1-dimensional.*

Beweis. Sei $\rho\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ eine einfache Darstellung. Dann sind die $\mathfrak{g}$-invarianten Räume V_i von oben 1-dimensionale Unterdarstellungen. Sie sind aber keine echten Unterdarstellungen, da ρ einfach ist. Also folgt $\dim V = 1$. □

Bemerkung 1.6.27. Der Satz von Lie ist im allgemeinen falsch, wenn man eine der Voraussetzungen weglässt. Man nehme etwa die Lie Algebra $\mathfrak{sl}_2(k)$, und betrachte die natürliche Darstellung

$$\rho\colon \mathfrak{sl}_2(k) \to \mathfrak{gl}_2(k)$$

mit $\rho(x) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\rho(y) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\rho(h) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Die $\rho(z)$ besitzen offensichtlich keinen gemeinsamen Eigenvektor ungleich Null für alle $z \in \mathfrak{sl}_2(k)$, so daß es auch keine Basis gibt, in der alle Operatoren durch obere Dreiecksgestalt dargestellt werden. Für Charakteristik ungleich 2 ist die Lie Algebra $\mathfrak{sl}_2(k)$ allerdings auch nicht auflösbar, und deshalb der Satz von Lie nicht anwendbar. In Charakteristik 2 hingegen ist $\mathfrak{sl}_2(k)$ hier aber nilpotent, also auflösbar. Wir haben also auch gleich ein Gegenbeispiel für Charaktersitik 2.

Bemerkung 1.6.28. Das folgende Beispiel widerlegt den Satz von Lie in jeder Charakteristik $p > 0$: Sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{r}_2(k)$ mit $\operatorname{char}(k) = p$. Wir wählen die Lie Klammer als $[x, y] = x$ und definieren eine p-dimensionale Darstellung

$$\rho\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$$

der auflösbaren Lie Algebra $\mathfrak{g}$ auf dem Vektorraum V mit Basis $(e_1, \dots, e_p)$ durch $\rho(x) = E$, $\rho(y) = F$ mit

$$\begin{aligned} E(e_1) &= e_p, \\ E(e_i) &= e_{i-1},\ i \geq 2, \\ F(e_i) &= (i-1)e_i. \end{aligned}$$

Man rechnet nach, daß

$$\begin{aligned} [E, F](e_1) &= E(F(e_1)) - F(E(e_1)) \\ &= 0 - (p-1)e_p \\ &= e_p, \\ [E, F](e_i) &= E(F(e_i)) - F(E(e_i)) \\ &= (i-1)e_{i-1} - (i-2)e_{i-1} \\ &= e_{i-1} \end{aligned}$$

für $i \geq 2$. Also ist $[\rho(x), \rho(y)] = [E, F] = E = \rho(x)$ und ρ wegen $\operatorname{char}(k) = p$ tatsächlich eine Darstellung (in Charakteristik Null hingegen nicht !). Die Operatoren E, F haben die Gestalt

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & p-1 \end{pmatrix}.$$

Aus $Ev = \lambda v$ und $Fv = \mu v$ folgt schnell $v = 0$, zuerst für $\mu = 0$, dann für $\mu \neq 0$. Die $\rho(v)$ haben also keinen gemeinsamen Eigenvektor ungleich Null.

Wir wollen hier erwähnen, daß es ein Analogon von Lie's Theorem für algebraische Gruppen gibt, das von Ellis Kolchin (1916-1991) bewiesen wurde.

Theorem 1.6.29 (Lie-Kolchin). *Sei G eine zusammenhängende auflösbare lineare algebraische Gruppe über einem algebraisch abgeschlossenen Körper beliebiger Charakteristik. Sei $\rho\colon G \to GL(V)$ eine Darstellung auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum. Dann existiert ein von Null verschiedener gemeinsamer Eigenvektor $v \in V$ für alle $\rho(g)$ mit $g \in G$.*

Ein Beweis findet sich zum Beispiel in [**20**]. Der Satz ist zum Beispiel über $\mathbb{R}$ nicht mehr richtig. Man betrachte dazu die folgende zusammenhängende kommutative lineare algebraische Gruppe über $\mathbb{R}$:

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a^2 + b^2 = 1, a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Sei ρ die natürliche Darstellung. Offensichtlich ist $\rho(G)$ nicht triangulierbar über $\mathbb{R}$.
Wir formulieren noch ein Korollar zum Satz von Lie.

Korollar 1.6.30. *Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie Algebra über einem Körper der Charakteristik Null. Dann ist $\mathfrak{g}$ genau dann auflösbar, wenn $\mathfrak{g}^1 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ nilpotent ist.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{g}^1$ nilpotent. Dann sind $\mathfrak{g}^1$ und $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}^1$ beide auflösbar, nämlich nilpotent bzw. abelsch. Nach Satz 1.6.19 ist dann auch $\mathfrak{g}$ auflösbar. Das gilt auch in Charakteristik $p > 0$.
Für die Umkehrung brauchen wir aber Charakteristik Null. Sei $\mathfrak{g}$ auflösbar. Wir nehmen zuerst einmal $k = \overline{k}$ an. Dann können wir den Satz von Lie mit der adjungierten Darstellung von $\mathfrak{g}$ anwenden. Bezüglich einer geeigneten Basis von $\mathfrak{g}$ besteht die Unteralgebra $\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ aus oberen Dreiecksmatrizen. Folglich besteht $[\mathrm{ad}(\mathfrak{g}), \mathrm{ad}(\mathfrak{g})] = \mathrm{ad}([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}])$ aus echten oberen Dreiecksmatrizen und ist daher nilpotent. Da der Kern von $\mathrm{ad}\colon [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ im Zentrum von $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ liegt, ist damit auch $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ nilpotent, nach Satz 1.6.8. Ist k nicht algebraisch abgeschlossen, so können wir die Methode der Skalarerweiterung anwenden. Sei $\mathbb{F}$ ein algebraischer Abschluß von k. Für einen k-Vektorraum V betrachtet man $V_{\mathbb{F}} = V \otimes_k \mathbb{F}$. Ist $\mathfrak{g}$ auflösbar, so auch $\mathfrak{g}_{\mathbb{F}}$. Also ist $[\mathfrak{g}_{\mathbb{F}}, \mathfrak{g}_{\mathbb{F}}]$ nach obigem Argument nilpotent, und somit auch $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. □

Bemerkung 1.6.31. Es gibt Beispiele von auflösbaren Lie Algebren in Charakteristik $p > 0$, deren Kommutatoralgebra nicht nilpotent ist. Wir können aus 1.6.28 ein solches Beispiel leicht konstruieren: Sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{r}_2(k)$ und V die angegebene p-dimensionale Darstellung. Wir machen

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{g} \oplus V$$

zu einer Lie Algebra, indem wir V als abelsche Lie Algebra ansehen und $\mathfrak{g}$ durch ρ auf V operieren lassen. Konkret gesprochen hat $\mathfrak{h}$ die Basis $(x, y, e_1, \ldots, e_p)$ und Lie Klammern

$$\begin{aligned} [x, y] &= x, \\ [x, e_1] &= e_p, \\ [x, e_i] &= e_{i-1}, \ i \geq 2, \\ [y, e_i] &= (i-1)e_i, \ 1 \leq i \leq p. \end{aligned}$$

Da V und der Quotient $\mathfrak{h}/V$ auflösbar sind, ist es auch $\mathfrak{h}$. Doch $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = kx \oplus V$ ist nicht nilpotent: $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]^1 = [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]^2 = \cdots = V$. Dieses Beispiel steht schon in [**21**].

Man kann aus dem Satz von Lie noch folgendes Korollar ableiten.

Korollar 1.6.32. *Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie Algebra über einem Körper k der Charakteristik Null. Dann ist $[\mathfrak{g}, \mathrm{rad}(\mathfrak{g})]$ ein nilpotentes Ideal von $\mathfrak{g}$. Es gilt also $[\mathfrak{g}, \mathrm{rad}(\mathfrak{g})] \subset \mathrm{nil}(\mathfrak{g})$.*

1.7. Die Klassifikation von Lie Algebren kleiner Dimension

Wir wollen hier alle Lie Algebren der Dimension $n = 1, 2, 3$ über einem beliebigen Körper k klassifizieren. Für $n = 1, 2$ ist das Resultat sehr übersichtlich. In Dimension 3 hingegen, über einem unendlichen Körper, gibt es bereits unendlich viele nicht-isomorphe (auflösbare) Lie Algebren. Wir unterscheiden die Fälle dann nach der Dimension von $\mathfrak{g}^1 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

• $\dim \mathfrak{g} = 1$: Hier ist $\mathfrak{g} \cong k$ die 1-dimensionale Lie Algebra mit der trivialen Lie Klammer.

• $\dim \mathfrak{g} = 2, \dim \mathfrak{g}^1 = 0$: Wir haben die abelsche Lie Algebra $\mathfrak{g} \cong k^2$.

• $\dim \mathfrak{g} = 2, \dim \mathfrak{g}^1 = 1$: Sei $\mathfrak{g} = kx + ky$. Dann ist $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = k \cdot [x, y]$ automatisch 0-dimensional oder 1-dimensional. Wir dürfen hier nun annehmen, daß $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = ky$ ist. Das bedeutet, $[x, y] = \alpha y$ mit einem $\alpha \neq 0$. Indem wir x durch $\alpha^{-1}x$ ersetzen, dürfen wir weiterhin annehmen, daß $[x, y] = y$ gilt. Wir bezeichnen diese Lie Algebra als $\mathfrak{r}_2(k)$. Jede nicht-abelsche 2-dimensionale Lie Algebra isomorph zu $\mathfrak{r}_2(k)$, wie wir gerade gezeigt haben. Diese Lie Algebra ist auch isomorph zu $\mathfrak{aff}(k) \cong k \ltimes k$ mit $[x, y] = [(1, 0), (0, 1)] = (0, 1) = y$.

• $\dim \mathfrak{g} = 3, \dim \mathfrak{g}^1 = 0$: Wir haben die abelsche Lie Algebra $\mathfrak{g} \cong k^3$.

• $\dim \mathfrak{g} = 3, \dim \mathfrak{g}^1 = 1$: Angenommen, $\mathfrak{g}^1 \subset Z(\mathfrak{g})$. Sei $\mathfrak{g}^1 = kz$. Wir ergänzen z zu einer Basis (x, y, z) von $\mathfrak{g}$. Wegen $z \in Z(\mathfrak{g})$ haben wir $[x, z] = [y, z] = 0$. Wir dürfen annehmen, daß $[x, y] = z$ gilt. Dann ist $\mathfrak{g}$ isomorph zur Heisenberg Lie Algebra $\mathfrak{h}_3(k)$. Liegt $\mathfrak{g}^1 = ky$ nicht im Zentrum von $\mathfrak{g}$, so existiert ein $x' \in \mathfrak{g}$ mit $[x', y] \neq 0$. Da $\dim \mathfrak{g}^1 = 1$ ist, haben wir $[x', y] = \alpha y$, und daher $[x, y] = y$ mit $x = \alpha^{-1}x'$. Die Unteralgebra $\mathfrak{a} = kx + ky$ ist also isomorph zu $\mathfrak{r}_2(k)$. Wegen $\mathfrak{g}^1 \subset \mathfrak{a}$ ist $\mathfrak{a}$ sogar ein Ideal von $\mathfrak{g}$. Sei $z \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{a}$. Wegen $\mathrm{Der}(\mathfrak{a}) = \mathrm{ad}(\mathfrak{a})$ (siehe Beispiel 1.2.5) existiert ein $w \in \mathfrak{a}$ mit $\mathrm{ad}(z)_{|\mathfrak{a}} = \mathrm{ad}(w)$. Damit ist $[z - w, \mathfrak{a}] = 0$. Also haben wir eine direkte Zerlegung $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus k \cdot (z - w) \cong \mathfrak{r}_2(k) \oplus k$.

• $\dim \mathfrak{g} = 3, \dim \mathfrak{g}^1 = 2$: Wir behaupten, daß $\mathfrak{g}^1$ abelsch ist. Andernfalls wäre nämlich $\mathfrak{g}^1 \cong \mathfrak{r}_2(k)$ und somit $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{r}_2(k) \oplus k$, wie oben. Das stünde im Widerspruch zu $\dim \mathfrak{g}^1 = 2$. Also ist $\mathfrak{g}^1$ ein abelsches Ideal von $\mathfrak{g}$. Wählen wir nun ein $x \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{g}^1$, so ist

$$\mathfrak{g} \cong kx \ltimes \mathfrak{g}^1 \cong k \ltimes k^2.$$

Diese Lie Algebren sind auflösbar. Jedes solche semidirekte Produkt läßt sich durch einen Homomorphismus $D\colon k \to \mathfrak{gl}_2(k)$, d.h., durch eine linear Abbildung $A = D(1) \in GL_2(k)$ bestimmen. Die Lie Klammer in $\mathfrak{g}$ ist dann für $x, x' \in k^2$ und $t, t' \in k$ gegeben durch

$$[(t, x), (t', x')] = (0, tAx' - t'Ax).$$

Die Matrix A ist invertierbar wegen $\dim \mathfrak{g}^1 = 2$. Wir bezeichnen die so erhaltene Lie Algebra mit $\mathfrak{g}_A$. Die Frage ist, wie man die Isomorphieklassen solcher Lie Algebren bestimmt. Sei also $\varphi\colon \mathfrak{g}_A \to \mathfrak{g}_B$ ein Isomorphismus zweier solcher Lie Algebren. Dann gilt $\varphi(\mathfrak{g}_A^1) \subset \mathfrak{g}_B^1$. Also gibt es ein $C \in GL_2(k)$, ein $\alpha \in k^*$ und ein $y \in k^2$ mit $\varphi(t, x) = (\alpha t, Cx + ty)$. Andererseits gilt für alle $t.t', x, x'$

$$\begin{aligned}(0, tCAx' - t'CAx) &= \varphi([(t,x),(t',x')]_A) \\ &= [\varphi(t,x),\varphi(t',x')]_B \\ &= [(\alpha t, Cx + ty),(\alpha t', Cx' + t'y)]_B \\ &= (0, \alpha tBCx' + \alpha tt'By - \alpha t'BCx - \alpha tt'By) \\ &= (0, \alpha tBCx' - \alpha t'BCx).\end{aligned}$$

Daraus folgt $CA = \alpha BC$ oder

$$A = \alpha C^{-1}BC.$$

Wir können nun die Gruppe $G = k^* \times GL_2(k)$ auf $GL_2(k)$ durch $(\alpha, C).A = \alpha C^{-1}AC$ operieren lassen. Dann sind die Lie Algebren $\mathfrak{g}_A$ und $\mathfrak{g}_B$ genau dann isomorph, wenn A und B in der gleichen Bahn liegen. Nun muss man noch die Bahnen bestimmen. Sei dazu zunächst k algebraisch abgeschlossen. Es folgt aus dem Satz über die Jordansche Normalform, daß ein Repräsentantensystem für die Bahnen der Operation von G unter den folgenden Matrizen zu finden ist:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \lambda \in k^*.$$

Das entspricht den folgenden Lie Algebren:

$$\begin{aligned}\mathfrak{r}_3(k) &: [e_1, e_2] = e_2,\ [e_1, e_3] = e_2 + e_3, \\ \mathfrak{r}_{3,\lambda}(k) &: [e_1, e_2] = e_2,\ [e_1, e_3] = \lambda e_3,\ \lambda \neq 0.\end{aligned}$$

Dabei sind die einzigen Isomorphismen mit $\lambda, \mu \in k^*$ wie folgt: $\mathfrak{r}_{3,\lambda}(k) \cong \mathfrak{r}_{3,\mu}(k)$ genau dann wenn $\lambda = \mu$ oder $\lambda\mu = 1$ ist.
Tatsächlich kann man die Klassifikation über *jedem* Körper angeben, siehe [**13**]:

Satz 1.7.1. *Sei $\mathfrak{g}$ eine 3-dimensionale Lie Algebra über einem beliebigen Körper k mit $\dim \mathfrak{g}^1 = 2$. Dann ist $\mathfrak{g}$ isomorph zu einer der folgenden auflösbaren Lie Algebren:*

$$\begin{aligned}L^1 &: [e_3, e_1] = e_1,\ [e_3, e_2] = e_2, \\ L^2_\alpha &: [e_3, e_1] = e_2,\ [e_3, e_2] = \alpha e_1 + e_2,\ \alpha \neq 0, \\ L^3_\alpha &: [e_3, e_1] = e_2,\ [e_3, e_2] = \alpha e_1,\ \alpha \neq 0.\end{aligned}$$

Die einzigen Isomorphismen sind, für $\alpha, \beta \in k^*$, wie folgt: $L^3_\alpha \cong L^3_\beta$ genau dann wenn $\alpha = t^2\beta$ mit einem $t \in k^*$.

• $\dim \mathfrak{g} = 3, \dim \mathfrak{g}^1 = 3$: Zunächst einmal folgt, daß $\mathfrak{g}$ *einfach* ist: andernfalls hätte $\mathfrak{g}$ ein nicht-triviales Ideal $\mathfrak{a}$, das wegen $\dim \mathfrak{a} \leq 2$ auflösbar sein müßte. Ebenso wäre auch $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ auflösbar, und damit $\mathfrak{g}$ selbst auflösbar, was wegen $\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g}$ unmöglich ist. Widerspruch.
Sei (e_1, e_2, e_3) eine Basis von $\mathfrak{g}$ und setze

$$f_1 = [e_2, e_3],\ f_2 = [e_3, e_1],\ f_3 = [e_1, e_2].$$

Wegen $\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g}$ ist dann (f_1, f_2, f_3) ebenfalls eine Basis von $\mathfrak{g}$. Wir können die eine Basis durch die andere ausdrücken:

$$f_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} e_j.$$

Die Jacobi-Identität $J(x, y, z) = 0$ in $\mathfrak{g}$ bezüglich der Basis (e_1, e_2, e_3) erzwingt dann Bedingungen an die Koeffizienten a_{ij}: die Matrix

$$A := (a_{ij})_{1 \le i,j \le 3}$$

muß symmetrisch sein. Wegen der Schiefsymmetrie der Lie Klammer ist $J = 0$, sobald zwei Elemente gleich sind. Es genügt also, die Bedingung $J(e_1, e_2, e_3) = 0$ auszuwerten:

$$\begin{aligned} 0 &= J(e_1, e_2, e_3) \\ &= [e_1, [e_2, e_3]] + [e_2, [e_3, e_1]] + [e_3, [e_1, e_2]] \\ &= [e_1, f_1] + [e_2, f_2] + [e_3, f_3] \\ &= a_{12} f_3 - a_{13} f_2 - a_{21} f_3 + a_{23} f_1 + a_{31} f_2 - a_{32} f_1. \end{aligned}$$

Umgekehrt erhalten wir zu jeder symmetrischen Matrix $A \in M_3(k)$ eine Lie Algebra $\mathfrak{g}_A$, indem wir die Klammern $[e_i, e_j]$ gemäß A vorgeben. Damit haben wir alle 3-dimensionalen einfachen Lie Algebren beschrieben. Nun muß man noch feststellen, wann zwei Lie Algebren $\mathfrak{g}_A$ und $\mathfrak{g}_B$ isomorph sind. Sei M die Matrix eines Isomorphismus $\varphi\colon \mathfrak{g}_A \to \mathfrak{g}_B$. Ähnlich wie zuvor rechnet man nach, daß

$$B = \det(M)(M^{-1})^t A M^{-1}$$

gilt. Wenn wir nun eine Operation der Gruppe $G = k^* \times GL_3(k)$ auf dem Raum der symmetrischen Matrizen in $M_3(k)$ durch $(\alpha, C)A = \alpha C A C^t$ definieren, so sehen wir, daß $\mathfrak{g}_A$ und $\mathfrak{g}_B$ genau dann isomorph sind, wenn A und B in der gleichen G-Bahn liegen. Ist k algebraisch abgeschlossen und $\mathrm{char}(k) \neq 2$, so kann man jede symmetrische Bilinearform aus der zugehörigen quadratischen Form rekonstruieren und somit eine Hauptachsentransformation durchführen. Folglich besteht das Repräsentantensystem nur aus der Identität $A = E_3$. Das entspricht der Lie Algebra

$$\mathfrak{so}_3(k) : [e_1, e_2] = e_3,\ [e_2, e_3] = e_1,\ [e_3, e_1] = e_2.$$

Sie ist isomorph zu $\mathfrak{sl}_2(k)$: der Isomorphismus $\varphi\colon \mathfrak{sl}_2(k) \to \mathfrak{so}_3(k)$ ist gegeben durch

$$\varphi = \begin{pmatrix} t & t & 0 \\ 0 & 0 & 2t \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei $t \in k$ eine Lösung von $t^2 + 1 = 0$ ist.

SATZ 1.7.2. *Sei $\mathfrak{g}$ eine einfache, 3-dimensionale Lie Algebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k mit* $\mathrm{char}(k) \neq 2$. *Dann ist $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{sl}_2(k)$.*

Ist k nicht algebraisch abgeschlossen, so bleibt dieser Satz i.a. nicht richtig. Es ist leicht zu sehen, daß zum Beispiel $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ und $\mathfrak{so}_3(\mathbb{R})$ nicht isomorph sein können: die erste Algebra besitzt eine 2-dimensionale Unteralgebra, die zweite nicht.

SATZ 1.7.3. *Sei $\mathfrak{g}$ eine einfache, reelle 3-dimensionale Lie Algebra. Dann ist $\mathfrak{g}$ isomorph zu $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ oder $\mathfrak{so}_3(\mathbb{R})$.*

Ist $\mathrm{char}(k) = 2$, so ist $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{sl}_2(k)$ nicht mehr einfach, sondern nilpotent. Es gibt aber eine andere Lie Algebra, die dann einfach ist:

$$W(1;\underline{2})^{(2)} \ : \ [x,y] = h, \ [h,x] = x, \ [h,y] = y.$$

Das folgende Resultat findet sich in [**31**]:

SATZ 1.7.4. *Sei $\mathfrak{g}$ eine einfache, 3-dimensionale Lie Algebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper oder einem endlichen Körper k mit* $\mathrm{char}(k) = 2$*. Dann ist $\mathfrak{g} \cong W(1;\underline{2})^{(2)}$.*

Für endliche Köper im allgemeinen gilt [**31**]:

SATZ 1.7.5. *Sei $\mathfrak{g}$ eine einfache, 3-dimensionale Lie Algebra über einem einem endlichen Körper k der Charakteristik $p \geq 3$. Dann ist $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{sl}_2(k)$.*

In Dimension 4 wird die Klassifikation noch viel komplizierter. Für $k = \mathbb{C}$ erhalten wir folgende Liste, wobei α, β komplexe Parameter sind.

$\mathfrak{g}$	Lie brackets
$\mathfrak{g}_0 = \mathbb{C}^4$	$-$
$\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{n}_3(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}$	$[e_1, e_2] = e_3$
$\mathfrak{g}_2 = \mathfrak{n}_4(\mathbb{C})$	$[e_1, e_2] = e_3,\ [e_1, e_3] = e_4$
$\mathfrak{g}_3 = \mathfrak{r}_2(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}^2$	$[e_1, e_2] = e_2$
$\mathfrak{g}_4 = \mathfrak{r}_2(\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{r}_2(\mathbb{C})$	$[e_1, e_2] = e_2,\ [e_3, e_4] = e_4$
$\mathfrak{g}_5 = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}$	$[e_1, e_2] = e_2,\ [e_1, e_3] = -e_3,\ [e_2, e_3] = e_1$
$\mathfrak{g}_6$	$[e_1, e_2] = e_2,\ [e_1, e_3] = e_3,\ [e_1, e_4] = e_4$
$\mathfrak{g}_7(\alpha)$	$[e_1, e_2] = e_2,\ [e_1, e_3] = e_3,\ [e_1, e_4] = e_3 + \alpha e_4$
$\mathfrak{g}_8$	$[e_1, e_2] = e_2,\ [e_1, e_3] = e_3,\ [e_1, e_4] = 2e_4,\ [e_2, e_3] = e_4$
$\mathfrak{g}_9(\alpha, \beta)$	$[e_1, e_2] = e_2,\ [e_1, e_3] = e_2 + \alpha e_3,\ [e_1, e_4] = e_3 + \beta e_4$
$\mathfrak{g}_{10}(\alpha)$	$[e_1, e_2] = e_2,\ [e_1, e_3] = e_2 + \alpha e_3,$ $[e_1, e_4] = (\alpha + 1)e_4,\ [e_2, e_3] = e_4$

Hier gilt $\mathfrak{g}_{10}(\alpha) \cong \mathfrak{g}_{10}(\alpha')$ genau dann wenn $\alpha\alpha' = 1$ or $\alpha = \alpha'$. Weiterhin gilt $\mathfrak{g}_9(\alpha_1, \beta_1) \cong \mathfrak{g}_9(\alpha_2, \beta_2)$ genau dann wenn die Doppelverhältnisse $1 : \alpha_1 : \beta_1$ und $1 : \alpha_2 : \beta_2$ übereinstimmen, bis auf Permutation. Das bedeutet, für $\alpha, \beta \neq 0$:

$$\mathfrak{g}_9(\alpha, \beta) \cong \mathfrak{g}_9(\alpha', \beta')$$

genau dann, wenn (α', β') eine der folgenden Möglichkeiten ist:

$$(\alpha, \beta),\ (\beta, \alpha),\ \left(\frac{1}{\alpha}, \frac{\beta}{\alpha}\right),\ \left(\frac{\beta}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right),\ \left(\frac{1}{\beta}, \frac{\alpha}{\beta}\right),\ \left(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{1}{\beta}\right).$$

Mit anderen Worten, alle Isomorphismen lassen sich aus den folgenden zwei zusammmensetzen:

$$\mathfrak{g}_9(\alpha, \beta) \cong \mathfrak{g}_9(\beta, \alpha)$$
$$\mathfrak{g}_9(\alpha, \beta) \cong \mathfrak{g}_9\left(\frac{1}{\beta}, \frac{\alpha}{\beta}\right), \beta \neq 0$$

Weiterhin sind noch die folgenden Lie Algebren zerlegbar:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_7(0) &\cong \mathfrak{r}_{3,1}(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}, \\ \mathfrak{g}_9(\alpha, 0) &\cong \mathfrak{r}_{3,\alpha}(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C} \text{ with } \alpha \neq 0, 1 \\ \mathfrak{g}_9(0, 1) &\cong \mathfrak{r}_3(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}. \end{aligned}$$

1.8. Lie Gruppen und Lie Algebren

Lie Gruppen bilden die bedeutendste Klasse differenzierbarer Mannigfaltigkeiten. Wichtige endlich-dimensionale Beispiele sind die algemeine lineare Gruppe $GL_n(\mathbb{R})$, die unitäre Gruppe, die orthogonale Gruppe und die spezielle lineare Gruppe. Von zentraler Wichtigkeit für die Lie Theorie ist die Beziehung zwischen einer Lie Gruppe und ihrer Lie Algebra. Wir wollen kurz andeuten, wie diese Beziehung aussieht. Der Vollständigkeit halber hier die Definition einer Lie Gruppe.

Definition 1.8.1. Eine Lie Gruppe G ist eine Gruppe, deren Elemente die Punkte einer glatten Mannigfaltigkeit bilden, so daß die Gruppenmultiplikation $G \times G \to G$ eine glatte Abbildung ist.

Die Abbildung $x \to x^{-1}$ ist dann auch glatt. Für eine Lie Gruppe G kann man den Tangentialraum an der Eins betrachten, also $T_1(G)$. Dieser Vektorraum hat eine Lie Klammer. Auf diese Weise erhält man die Lie Algebra $\mathfrak{g}$ von G. Die Zuordnung $G \to T_1(G)$ ist sogar ein Funktor von der Kategorie der Lie Gruppen in die Kategorie der Lie Algebren.
Wir wollen uns das anschauen am Beispiel der orthogonale Gruppe $G = O(n)$, die aus den $n \times n$-Matrizen A besteht mit $A^tA = E_n$. Sie ist eine Lie Gruppe. Wie kommen wir nun zu ihrer Lie Algebra $\mathfrak{so}(n)$? Wir betrachten differenzierbare Familien

$$A\colon\,]-\varepsilon, \varepsilon[\to O(n) \subset \mathbb{R}^{n^2}$$

für ein $\varepsilon > 0$ mit $A(0) = E_n$. Alle Einträge sollen also differenzierbare Funktionen sein. Nun leiten wir die Bedingung $A(t)^tA(t) = E_n$ nach t ab:

$$\dot{A}(t)^tA(t) + A(t)^t\dot{A}(t) = 0,$$

und setzen $t = 0$ ein, womit

$$\dot{A}(0)^t + \dot{A}(0) = 0$$

gilt, also $X + X^t = 0$ mit $X = \dot{A}(0)$. Mit anderen Worten, $\mathfrak{so}(n)$ besteht aus den schiefsymmetrischen $n \times n$-Matrizen. Wie wir schon wissen, definiert der Kommutator auf diesem Raum eine Lie Klammer. Wir haben damit den Tangentialraum $T_1(O(n))$ ausgerechnet.
Betrachten wir für ein $A \in O(n)$ die Konjugation $c_A\colon O(n) \to O(n)$, mit $B \mapsto ABA^{-1}$. Wenn wir statt einer festen Matrix A hier wieder eine differenzierbare Familie wie oben nehmen, nach t ableiten und dann $t = 0$ setzen, so bekommen wir

$$(A(t)BA(t)^{-1})^{\cdot}|_{t=0} = \dot{A}(0)B - B\dot{A}(0).$$

Dabei haben wir

$$(A(t)^{-1})^{\cdot} = -A(t)^{-1}\dot{A}(t)A(t)^{-1}$$

verwendet, was durch Ableiten von $A(t)A(t)^{-1} = E_n$ folgt. Wir sehen, daß wir genau die adjungierte Darstellung der Lie Algebra ausgerechnet haben:

$$\begin{aligned} \operatorname{ad}(X)\colon \mathfrak{so}(n) &\to \mathfrak{so}(n) \\ Y &\to XY - YX. \end{aligned}$$

Eine natürliche Frage ist nun, ob man den eben beschriebenen Weg *umkehren* kann. Das ist zumindest teilweise möglich, nämlich wenn die Lie Gruppe zusammenhängend und einfach zusammenhängend ist. Dann ist die Lie Gruppe bis auf Isomorphismus durch ihre Lie Algebra bestimmt. Die sogenannte Exponentialfunktion $\exp\colon \mathfrak{g} \to G$ ist dabei ein lokaler Diffeomorphismus. Zusätzlich gilt, mit Hilfe des Satzes von Ado:

THEOREM 1.8.2 (Lie's third theorem). *Jede endlich-dimensionale Lie algebra ist isomorph zu einer Lie algebra einer Lie Gruppe.*

Insgesamt haben wir folgendes Resultat:

THEOREM 1.8.3. *Der Funktor $G \to T_1(G)$ definiert eine Äquivalenz von Kategorien zwischen der Kategorie der zusammenhängenden, einfach zusammenhängenden Lie Gruppen und der Kategorie der Lie Algebren.*

Was passiert in unserem Beispiel $G = O(n)$? Die Exponentialabbildung

$$\exp\colon \mathfrak{so}(n) \to SO(n)$$

hat als Bild nur die Untergruppe $SO(n)$ von $O(n)$ der orthogonalen Matrizen aus $O(n)$ mit Determinante $+1$. Als topologischer Raum besteht $O(n)$ aus zwei Zusammenhangskomponenten, wovon die zweite aus orhogonalen Matrizen der Determinante -1 besteht. Für $A \in \mathfrak{gl}(n)$ ist $\exp(A)$ durch

$$e^A = E_n + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^n}{n!} + \cdots$$

gegeben. Diese Reihe konvergiert gleichmäßig auf jeder beschränkten Teilmenge von $\mathfrak{gl}(n)$ und es gilt $\det(e^A) = e^{\operatorname{tr}(A)}$. Also ist $e^A \in GL(n)$. Außerdem ist $e^{A+B} = e^A e^B$, falls $AB = BA$ und $Be^A B^{-1} = e^{BAB^{-1}}$.
Für $\mathfrak{so}(n)$ erhalten wir also die Lie Gruppe $SO(n)$ zurück, und nicht $O(n)$. Also sollten wir für unsere Korrespondenz einfach zusammenhängende Lie Gruppen vorziehen.

BEISPIEL 1.8.4. *Für die Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathfrak{so}_2(\mathbb{R})$ ist*

$$e^A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in SO_2(\mathbb{R}).$$

Man kann sich fragen, wann die Exponentialabbildung tatsächlich *surjektiv* ist. Selbst für zusammmenhängende Matrixgruppen muß das nämlich nicht unbedingt der Fall sein. In der Tat ist nämlich z.B.

$$\exp\colon \mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) \to SL_n(\mathbb{R})$$

für $n \geq 2$ nicht surjektiv. Um das einzusehen, dürfen wir $n = 2$ annehmen. Sei also

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$$

eine beliebige Matrix aus $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$. Dann ist $A^2 = (a^2 + bc)E_2 = -\det(A)E_2$. Ist also $\det(A) = 0$ dann ist $e^A = E_2 + A$, und somit $\operatorname{tr}(e^A) = 2$. Für $\det(A) > 0$ kann man ein $\omega > 0$ finden mit $\det(A) = \omega^2$, also $\omega^2 = -(a^2 + bc)$. Dann ist $A^2 = -\omega^2 E_2$ und

$$e^A = \cos(\omega)E_2 + \frac{\sin(\omega)}{\omega}A.$$

Damit ist dann $\operatorname{tr}(e^A) = 2\cos(\omega) \in [-2, 2]$. Zuletzt kann noch $\det(A) < 0$ sein, oder $a^2+bc > 0$. Dann gibt es ein $\eta > 0$ mit $\eta^2 = a^2 + bc$, und $A^2 = \eta^2 E_2$. Dann folgt

$$e^A = \cosh(\eta)E_2 + \frac{\sinh(\eta)}{\eta}A.$$

Das bedeutet $\operatorname{tr}(e^A) = 2\cosh(\omega) \in [2,\infty)$. Insgesamt folgt immer $\operatorname{tr}(e^A) \geq -2$. Deshalb ist es jetzt klar, daß zum Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \notin \exp(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})),$$

aber sehr wohl $A \in SL_2(\mathbb{R})$ liegt. Man überlege sich, daß übrigens auch, für $\lambda \neq 0$ alle Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & \lambda \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \notin \exp(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}))$$

nicht im Bild von exp liegen.

Andererseits gilt aber folgender Satz:

SATZ 1.8.5. *Sei G eine zusammmenhängende kompakte reelle Lie Gruppe. Dann ist die Exponentialabbildung surjektiv.*

Das ist aber nicht das einzige Kriterium. Zum Beispiel ist $\exp\colon \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ surjektiv, während $\exp\colon \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) \to SL_n(\mathbb{C})$ und $\exp\colon \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$ es nicht sind. Zu diesem Thema gibt es umfangreiche Untersuchungen, siehe zum Beispiel [**14**] und die angegebenen Referenzen. Wir wollen noch erwähnen, daß nicht alle endlich-dimensionalen Lie Gruppen Matrixgruppen sein müssen. Sei

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, x, y, z \in \mathbb{R} \right\}, \quad N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Dann ist N ein Normalteiler in G und $H = G/N$ eine 3-dimensionale Lie Gruppe.

SATZ 1.8.6. *Jeder Lie Homomorphismus $\varphi\colon H \to GL_n(\mathbb{R})$ hat einen nicht-trivialen Kern.*

Mit anderen Worten, es gibt gar keine treue Darstellung. Somit ist H keine Matrixgruppe.

CHAPTER 2

Strukturtheorie von Lie Algebren

2.1. Die Jordan-Zerlegung

Sei k ein Körper der Charaketristik Null. Für einen Endomorphismus $x \in \operatorname{End}(V)$ erinnern wir an den *Eigenraum* $E_\lambda(x)$ zum Eigenwert $\lambda \in k$, der durch

$$E_\lambda(x) = \ker(x - \lambda \operatorname{id})$$

gegeben ist. Der Hauptraum, oder verallgemeinerte Eigenraum von x zu λ ist durch

$$H_\lambda(x) = \bigcup_{n \geq 0} \ker(x - \lambda \operatorname{id})^n$$

gegeben.

Definition 2.1.1. Ein $x \in \operatorname{End}(V)$ heißt *diagonalisierbar*, falls V die direkte Summe der Eigenräume von x ist, also $V = \oplus_\lambda E_\lambda(x)$. Wir nennen x *halbeinfach*, wenn V als Modul der Lie Algebra $kx \subset \operatorname{End}(V)$ halbeinfach ist.

Ist $x \in \operatorname{End}(V)$ nilpotent, so ist $V = H_0(x)$. Die Umkehrung gilt i.a. nur dann, wenn V endlich-dimensional ist. Es ist x halbeinfach, wenn zu jedem x-invarianten Unterraum $U \subset V$ ein komplementärer x-invarianter Unterraum U' existiert mit $V = U \oplus U'$. Man kann zeigen, daß x halbeinfach ist genau dann, wenn die Wurzeln seines Minimalpolynoms über k alle verschieden sind.

Lemma 2.1.2. *Ist k algebraisch abgeschlossen, so ist $x \in \operatorname{End}(V)$ genau dann halbeinfach, wenn x diagonalisierbar ist.*

Beweis. Es sei x diagonalisierbar. Dann ist V die direkte Summe der Eigenräume, und damit auch Summe von 1-dimensionalen x-invarianten Unterräumen, die einfache kx-Untermoduln sind. Aus Satz 1.2.26, Teil (2) folgt, daß x halbeinfach ist. Sei umgekehrt x halbeinfach. Dann ist V nach Satz 1.2.26 die direkte Summe einfacher kx-Moduln. Es genügt daher zu zeigen, daß jeder einfache kx-Modul 1-dimensional ist, denn jeder 1-dimensionale kx-Untermodul wird von einem Eigenvektor von x aufgespannt. Sei also $V \neq 0$ ein einfacher kx-Modul und $v \in V \setminus 0$. Dann folgt $V = \operatorname{span}\{x^n.v \mid n \geq 0\}$. Die rechte Seite ist nämlich ein von Null verschiedener x-invarianter Unterraum, also gleich ganz V. Wären nun alle $x^n.v$ linear unabhängig, dann wäre $U = \operatorname{span}\{x^n.v \mid n \geq 1\}$ ein echter x-invarianter Unterraum, im Widerspruch zur Annahme. Also gibt es ein $n \geq 1$, so daß $x^n.v$ die Linearkombination von $v, x.v, \ldots, x^{n-1}.v$ ist. Also ist V endlich-dimensional. Weil $k = \overline{k}$ ist, hat x dann einen Eigenvektor w in V und $V = \operatorname{span}\{w\}$ ist 1-dimensional. $\square$

Lemma 2.1.3. *Es seien $x, y \in \operatorname{End}(V)$ zwei kommutierende Endomorphismen. Sind x und y diagonalisierbar, so auch ihre Summe $x + y$. Sind x und y nilpotent, so auch ihre Summe $x + y$.*

Beweis. Die erste Aussage ist ein bekanntes Resultat in der lineare Algebra über das simultane Diagonalisieren von kommutierenden Endomorphismen. Für k algebraisch abgeschlossen können wir den Beweis mit Lemma 2.1.2 wie folgt führen: Für jeden Eigenvektor $v \in E_\lambda(x)$ gilt $xy(v) = yx(v) = \lambda y(v)$. Also ist $yv \in E_\lambda(x)$ und y läßt die Eigenräume von x invariant. Da y diagonalisierbar ist, ist V ein halbeinfacher ky-Modul. Untermoduln von V sind daher auch halbeinfach. Damit ist auch die Einschränkung von y auf die Eigenräume von x diagonalisierbar. Es gibt also eine Basis von Eigenvektoren bezüglich welcher x und y simultan Diagonalgestalt haben. Es folgt, daß $x + y$ diagonalisierbar ist.
Sind $x^n = y^m = 0$, so folgt wegen $xy = yx$ aus der binomischen Formel

$$(x + y)^k = \sum_{i+j=k} \binom{k}{i} x^i y^j.$$

Für $k \geq n + m - 1$ verschwinden alle Summanden und es gilt $(x + y)^k = 0$. □

Satz 2.1.4 (Jordan-Chevalley). *Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k und $x \in \mathrm{End}(V)$. Dann gelten folgende Aussagen:*

(1) *Es gibt eindeutige $x_s, x_n \in \mathrm{End}(V)$ mit $x = x_s + x_n$, wobei x_s halbeinfach, x_n nilpotent ist und x_s, x_n kommutieren.*
(2) *Die Eigenräume von x_s sind die Hauptträume von x, d.h., $E_\lambda(x_s) = H_\lambda(x)$.*
(3) *Es gibt Polynome $p(t), q(t) \in k[t]$ ohne konstanten Term mit $x_s = p(x)$ und $x_n = q(x)$.*
(4) *Vertauscht $y \in \mathrm{End}(V)$ mit x, so auch mit x_s und x_n.*
(5) *Vertauschen $x, y \in \mathrm{End}(V)$, so gilt $(x + y)_s = x_s + y_s$ und $(x + y)_n = x_n + y_n$.*

Beweis. Es seien α_i die verschiedenen Eigenwerte von x mit Multiplizitäten m_i, für $i = 1, \ldots, k$. Also hat x das charakteristische Polynom

$$f = \prod_{i=1}^{k} (t - \alpha_i)^{m_i},$$

das in Linearfaktoren zerfällt, weil k algebraisch abgeschlossen ist. V ist die direkte Summe der Eigenräume $E_i = E_{\alpha_i}(x)$, von denen jeder x-invariant ist. Auf E_i hat x das charakteristische Polynom $(t - \alpha_i)^{m_i}$. Nun wenden wir den chinesischen Restsatz für den Ring $R = k[t]$ an. Er liefert ein Polynom p mit:

$$\begin{aligned} p(t) &\equiv \alpha_i \mod (t - \alpha_i)^{m_i} \\ p(t) &\equiv 0 \mod t. \end{aligned}$$

Wir setzen $q(t) = t - p(t)$. Klarerweise haben p und q keinen konstanten Term. Sei $x_s = p(x)$ und $x_n = q(x)$. Das sind Polynome in x. Also kommutieren sie miteinander, d.h., $[x_s, x_n] = 0$. Ebenso kommutieren sie mit Endomorphismen, die mit x kommutieren. Sie lassen auch die Eigenräume E_i invariant. Die erste Kongruenz zeigt, daß die Restriktion von $x_s - \alpha_i \,\mathrm{id}$ auf E_i identisch Null ist, für alle i. Deshalb operiert x_s diagonal auf E_i mit einzigem Eigenwert α_i. Nach Definition ist $x_n = x - x_s$ dann nilpotent. Damit sind (3), (4) und (1) bis auf die Eindeutigkeit gezeigt. Sei also $x = s + n$ eine weitere solche Zerlegung. Da s und n mit x vertauschen, so vertauschen sie auch mit x_s und x_n. Es gilt

$$s - x_s = n - x_n.$$

Da die Differenz von zwei kommutierenden diagonalisierbaren Endomorphismen s und x_s wieder diagonalisierbar ist, und $n - x_n$ wieder nilpotent ist, sind $s - x_s = n - x_n$ gleichzeitig diagonalisierbar und nilpotent, also identisch Null. Mit anderen Worten $s = x_s$ und $n = x_n$.

Vertauschen $x, y \in \mathrm{End}(V)$, so besagt Lemma 2.1.3, daß x_s+y_s diagonalisierbar ist, und x_n+y_n nilpotent. Beide kommutieren miteinander und es gilt $x+y=(x_s+y_s)+(x_n+y_n)$. Wegen der Eindeutigkeit der Jordan-Zerlegung folgt die Behauptung.
Punkt (2) überlassen wir dem Leser. □

Definition 2.1.5. Die Zerlegung $x = x_s + x_n$ heißt additive *Jordan Zerlegung* von $x \in \mathrm{End}(V)$. Dabei heißt x_s der halbeinfache Teil, und x_n der nilpotente Teil von x.

Beispiel 2.1.6. *Die Jordan-Zerlegung von* $x = \left(\begin{smallmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{smallmatrix}\right)$ *ist*

$$x = \begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Dagegen ist die Jordan-Zerlegung von $x = \left(\begin{smallmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{smallmatrix}\right)$ schon $x = x_s$ selbst, und nicht etwa

$$x = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Diese beiden Matrizen sind zwar halbeinfach, bzw. nilpotent, kommutieren aber nicht. x ist bereits halbeinfach und hat nilpotenten Teil $x_n = 0$.

Korollar 2.1.7. *Sei* $x = x_s+x_n$ *die Jordan-Zerlegung von* $x \in \mathrm{End}(V)$. *Sind Unterräume* $E \subset F \subset V$ *mit* $x(F) \subset E$ *gegeben, so folgt* $x_s(F) \subset E$ *und* $x_n(F) \subset E$.

Beweis. Für jedes Polynom $p(t) \in t \cdot k[t]$ gilt dann $p(x)F \subset E$. Die Behauptung folgt also aus Satz 2.1.4. □

Lemma 2.1.8. *Es sei* V *endlich-dimensional und* $x \in \mathrm{End}(V)$. *Ist* x *nilpotent bzw. diagonalisierbar, so auch* $\mathrm{ad}(x)$.

Beweis. Es seien L_x und R_x die Links- bzw. Rechtsmultiplikation mit x. Dann ist

$$\mathrm{ad}(x) = L_x - R_x$$
$$[L_x, R_x] = 0.$$

Wir müssen also wegen Lemma 2.1.3 nur zeigen, daß L_x, R_x die Diagonalisierbarkeit bzw. Nilpotenz von x erbt. Sei x nilpotent und $x^n = 0$. Dann ist $L_x^n = L_{x^n} = 0$ und ebenso $R_x^n = 0$. Demnach ist auch $L_x - R_x$ nilpotent. Sei nun x diagonalisierbar und $\lambda_1, \dots \lambda_n$ die verschiedenen Eigenwerte von x. Wir haben $V = \oplus_{j=1}^n E_{\lambda_i}(x)$. Für $y \in \mathrm{End}(V)$ schreiben wir $y = \sum_{j,k=1}^n y_{jk}$ mit $y_{jk}E_{\lambda_k}(x) \subset E_{\lambda_j}(x)$. Wir betrachten also die Blockmatrix von y bezüglich der direkten Summe von V in die Eigenräume. Dann ist

$$L_x y_{jk} = \lambda_j y_{jk}$$
$$R_x y_{jk} = \lambda_k y_{jk}$$
$$\mathrm{ad}(x) y_{jk} = (\lambda_j - \lambda_k) y_{jk}.$$

Somit sind $L_x, R_x \in \mathrm{End}(\mathrm{End}(V))$ diagonalisierbare Endomorphismen von $\mathrm{End}(V)$. □

Korollar 2.1.9. *Sei* $x \in \mathrm{End}(V)$ *und* $x = x_s+x_n$ *die Jordan-Zerlegung. Dann ist* $\mathrm{ad}(x) = \mathrm{ad}(x_s) + \mathrm{ad}(x_n)$ *die Jordan-Zerlegung von* $\mathrm{ad}(x)$ *in* $\mathrm{End}(\ \mathrm{End}(V))$.

Beweis. Wegen Lemma 2.1.8 ist $\mathrm{ad}(x_s)$ diagonalisierbar und $\mathrm{ad}(x_n)$ nilpotent. Da sie wegen $[\mathrm{ad}(x_s), \mathrm{ad}(x_n)] = \mathrm{ad}([x_s, x_n]) = 0$ kommutieren, folgt die Behauptung aus der Eindeutigkeit der Jordan-Zerlegung. □

Satz 2.1.10. *Sei A eine endlich-dimensionale k-Algebra. Dann enthält die Lie Algebra* $\mathrm{Der}(A)$ *den halbeinfachen und nilpotenten Teil aller ihrer Elemente.*

Beweis. Sei $D = D_s + D_n$ die Jordan-Zerlegung. Es genügt $D_s \in \mathrm{Der}(A)$ zu zeigen, da $\mathrm{Der}(A)$ ein Vektorraum ist, also dann $D_n = D - D_s \in \mathrm{Der}(A)$ folgt. Für $a, b \in A$ und $\lambda, \mu \in k$ gilt für alle $n \geq 1$

$$(D - (\lambda + \mu)\,\mathrm{id})^n(ab) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (D - \lambda\,\mathrm{id})^k(a)(D - \mu\,\mathrm{id})^{n-k}(b). \tag{2.1}$$

Ist $a \in E_\lambda(D_s) = H_\lambda(D)$, und $b \in E_\mu(D_s) = H_\mu(D)$, so folgt $ab \in E_{\lambda+\mu}(D_s) = H_{\lambda+\mu}(D)$, also $D_s(ab) = (\lambda + \mu)ab$. Andererseits ist $D_s(a)b + aD_s(b) = \lambda ab + \mu ab = (\lambda + \mu)ab$. Da aber A die direkte Summe der $E_\lambda(D_s)$ ist, folgt daraus, daß D_s eine Derivation von A ist. □

Ein Endomorphismus $x \in \mathrm{End}(V)$ heißt *unipotent*, falls $\mathrm{id} - x$ nilpotent ist. Äquivalent dazu ist die Bedingung, daß alle Eigenwerte in $\overline{k}$ gleich 1 sind. Ist $x = x_s + x_n$ die additive Jordan-Zerlegung, so ist $g_u = \mathrm{id} + x_s^{-1}x_n$ unipotent. Wir erwähnen die *multiplikative* Jordan-Zerlegung für algebraische Gruppen.

Satz 2.1.11. *Sei G eine algebraische Gruppe über einem perfekten Körper k. Für jedes Element $g \in G(k)$ gibt es eindeutig bestimmte Elemente $g_s, g_u \in G(k)$ mit $g = g_s g_u = g_u g_s$. Für alle Darstellungen $\varphi\colon G \to GL(V)$ ist $\varphi(g_s)$ halbeinfach und $\varphi(g_u)$ unipotent.*

Jedes $g \in \mathrm{Aut}(V)$ eines endlich-dimensionalen Vektorraums über einem algebraisch abgeschlossenen Körper hat eine eindeutige Jordan-Zerlegung $g = g_s g_u = g_u g_s$, wobei g_s halbeinfach und g_u unipotent ist. Für $g, h \in \mathrm{Aut}(V)$ mit $gh = hg$ gilt $(gh)_s = g_s h_s$ und $(gh)_u = g_u h_u$.
Ist G eine Untergruppe von $GL_n(k)$, so kann es Elemente g geben, für die nicht unbedingt $g_s, g_u \in G$ gilt. Man betrachte etwa

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Die eindeutige multiplikative Jordan-Zerlegung des Elementes g der Ordung 2 ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sowohl g_s als auch g_u liegen nicht in G. Ist G aber abgeschlossen, also eine lineare algebraische Gruppe, dann gilt $g_s, g_u \in G$ für alle $g \in G$.

Mit dem sogenannten Satz von Weyl, den wir in Theorem 2.3.7 beweisen, kann man folgenden Satz zeigen:

Satz 2.1.12. *Sei $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ eine halbeinfache lineare Lie Algebra und V endlich-dimensional. Dann enthält $\mathfrak{g}$ die halbeinfachen und nilpotenten Teile aller Elemente $x \in \mathfrak{g}$.*

Für einen Beweis siehe [**19**]. Bisher haben wir die Jordan-Zerlegung nur für lineare Lie Algebren definiert. Sie wird auch *konkrete* Jordan-Zerlegung genannt. Für beliebige Lie Algebren kann man sich fragen, ob und wie man eine *abstrakte* Jordan-Zerlegung definieren kann. Der folgende Satz gibt eine positive Antwort für halbeinfache Lie Algebren.

Satz 2.1.13. *Sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Lie Algebra über einem Körper der Charakteristik Null. Sei $x \in \mathfrak{g}$. Dann gibt es eindeutige Elemente $s, n \in \mathfrak{g}$ mit*

(1) $x = s + n$.
(2) $[s, n] = 0$.

(3) $\mathrm{ad}(s)$ *ist halbeinfach und* $\mathrm{ad}(n)$ *ist nilpotent.*

Der Beweis beruht vor allem auf Korollar 2.2.18, nämlich, daß

$$\mathrm{Der}(\mathfrak{g}) = \mathrm{ad}(\mathfrak{g})$$

gilt, also alle Derivationen halbeinfacher Lie Algebren innere Derivationen sind.
Das Element s wird *halbeinfacher Teil* von x genannt, und n der *nilpotente Teil* von x. Oft wird s auch *ad-halbeinfach* genannt, oder einfach nur *halbeinfach.* Ebenso nennt man n dann auch *ad-nilpotent.* Ist $\mathfrak{g}$ eine lineare halbeinfache Lie Algebra, so stimmen die konkrete und abstrakte Jordan-Zerlegung überein.

2.2. Das Kriterium von Cartan

Definition 2.2.1. Sei $\mathfrak{g}$ eine endlich-dimensionale Lie Algebra. Die Form $\kappa\colon \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to k$ mit

$$\kappa(x,y)=\operatorname{tr}(\operatorname{ad}(x)\operatorname{ad}(y))$$

heißt *Killingform*, oder Cartan-Killing-Form.

Allgemeiner können wir für jede endlich-dimensionale Darstellung $\rho\colon \mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(V)$ die Form $\kappa_\rho(x,y)=\operatorname{tr}(\rho(x)\rho(y))$ definieren. Dann ist $\kappa=\kappa_{\mathrm{ad}}$.

Definition 2.2.2. Eine Bilinearform $\beta\colon \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to k$ heißt *invariant*, falls

$$\beta([x,y],z)+\beta(y,[x,z])=0$$

für alle $x,y,z\in\mathfrak{g}$ ist.

Auch hier können wir die Invarianz bezüglich einer Darstellung ρ allgemeiner definieren durch $\beta(\rho(x)(v),w)+\beta(v,\rho(x)(w))=0$ für alle $x\in\mathfrak{g}$ und $v,w\in V$.

Definition 2.2.3. Ist β eine Bilinearform auf V und $U\subset V$, so definieren wir den Orthogonalraum

$$U^\perp=\{v\in V\mid \beta(v,u)=0\ \ \forall\, u\in U\}.$$

Lemma 2.2.4. *Sei $\rho\colon \mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(V)$ eine endlich-dimensionale Darstellung. Dann ist κ_ρ eine symmetrische, invariante Bilinearform auf $\mathfrak{g}$. Ist $\mathfrak{n}$ ein nilpotentes Ideal von $\mathfrak{g}$, so ist $\kappa(\mathfrak{n},\mathfrak{g})=0$, also $\mathfrak{n}\subset\mathfrak{g}^\perp$.*

Beweis. Es ist $\kappa_\rho(x,y)=\operatorname{tr}(\rho(x)\rho(y))=\operatorname{tr}(\rho(y)\rho(x))=\kappa_\rho(y,x)$. Die Invarianz folgt aus

$$\begin{aligned}\kappa_\rho([x,y],z)&=\operatorname{tr}(\rho([x,y])\rho(z))\\&=\operatorname{tr}(\rho(x)\rho(y)\rho(z))-\operatorname{tr}(\rho(y)\rho(x)\rho(z))\\&=\operatorname{tr}(\rho(y)\rho(z)\rho(x))-\operatorname{tr}(\rho(y)\rho(x)\rho(z))\\&=\operatorname{tr}(\rho(y)\rho([z,x]))\\&=-\kappa_\rho(y,[x,z]).\end{aligned}$$

Sei $x\in\mathfrak{n}$ und $y\in\mathfrak{g}$. Da $\mathfrak{n}$ nilpotent ist, besteht $\operatorname{ad}(\mathfrak{n})$ aus echten Dreiecksmatrizen. Wir setzen $V_j=\operatorname{ad}(\mathfrak{n})^j(\mathfrak{g})$ für $j\ge 0$. Wegen $[\mathfrak{n},\mathfrak{g}]\subset\mathfrak{n}$ folgt $\operatorname{ad}(x)\operatorname{ad}(y)V_j\subset V_{j-1}$. Also ist die Spur von $\operatorname{ad}(x)\operatorname{ad}(y)$ gleich Null, d.h., $\kappa(x,y)=0$. □

Insbesondere ist die Killingform einer nilpotenten Lie Algebra identisch Null.

Lemma 2.2.5. *Für $D\in\operatorname{Der}(\mathfrak{g})$ und $x,y\in\mathfrak{g}$ gilt $\kappa(D(x),y)+\kappa(x,D(y))=0$.*

Beweis. Wegen $[D,\operatorname{ad}(x)]=\operatorname{ad}(D(x))$ und der Invarianz gilt

$$\begin{aligned}\kappa(D(x),y)&=\operatorname{tr}(\operatorname{ad}(D(x))\operatorname{ad}(y))\\&=\operatorname{tr}([D,\operatorname{ad}(x)]\operatorname{ad}(y))\\&=-\operatorname{tr}(\operatorname{ad}(x)[D,\operatorname{ad}(y)])\\&=-\operatorname{tr}(\operatorname{ad}(x)\operatorname{ad}(D(y)))\\&=-\kappa(x,D(y)).\end{aligned}$$

□

Lemma 2.2.6. *Ist $\rho\colon \mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(V)$ eine Darstellung, und β eine invariante Bilinearform auf $\mathfrak{g}$, sowie $U\subset V$ eine Unterdarstellung von V, so ist auch $U^\perp$ eine Unterdarstellung von V.*

BEWEIS. Seien $u \in U$, $v \in U^\perp$ und $x \in \mathfrak{g}$. Dann gilt $\beta(\rho(x)(v), u) = -\beta(v, \rho(x)(u)) = 0$, weil $\rho(x)(u) \in U$ ist. Also folgt $\rho(x)(v) \in U^\perp$, und somit ist $U^\perp$ invariant unter $\mathfrak{g}$. □

Angewandt auf die Killingform $\beta = \kappa$ folgt das

KOROLLAR 2.2.7. *Für jedes Ideal $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{g}$ ist der Orthogonalraum $\mathfrak{a}^\perp$ bezüglich der Killingform wieder ein Ideal in $\mathfrak{g}$.*

SATZ 2.2.8. *Sei V ein endlich-dimensionaler k-Vektorraum und $E \subset F$ zwei Unterräume von* $\operatorname{End}(V)$. *Sei $x \in \operatorname{End}(V)$ ein Endomorphismus mit* $\operatorname{ad}(x)(F) \subset E$. *Gilt* $\operatorname{tr}(xy) = 0$ *für alle* $y \in \operatorname{End}(V)$ *mit* $\operatorname{ad}(y)(F) \subset E$, *so ist x nilpotent.*

BEWEIS. Sei $M = \{y \in \operatorname{End}(V) \mid \operatorname{ad}(y)(F) \subset E\}$. Angenommen, k ist algebraisch abgeschlossen. Sei $(v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V aus Eigenvektoren von x_s, sagen wir $x_s v_i = \lambda_i v_i$ für geeignete $\lambda_i \in k$. Sei $Q = \operatorname{span}_{\mathbb{Q}}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ der $\mathbb{Q}$-Vektorraum in k, der von den λ_i aufgespannt wird. Wir müssen $Q = 0$ zeigen. Dann ist $x = x_s + x_n = x_n$ nilpotent. Angenommen, $Q \neq 0$. Dann ist auch der Dualraum Q^* von Null verschieden. Es gibt also eine nichtverschwindende $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung $f\colon Q \to \mathbb{Q}$. Definiere $y \in \operatorname{End}(V)$ durch $y v_i = f(\lambda_i) v_i$ für $i = 1, \dots, n$. Wir behaupten, daß $y \in M$ gilt. Wir haben

$$\begin{aligned} \operatorname{ad}(y)(E_{ij}) &= (f(\lambda_i) - f(\lambda_j))E_{ij} \\ &= f(\lambda_i - \lambda_j)E_{ij} \end{aligned}$$

für alle i und j. Also ist

$$E_\mu(\operatorname{ad}(y)) = \bigoplus_{f(\lambda)=\mu} E_\lambda(\operatorname{ad}(x_s))$$

und insbesondere $\operatorname{ad}(y)(F) \subset E$, weil $\operatorname{ad}(x_s)(F) \subset E$ gilt, siehe Korollar 2.1.7. Also gilt nach Voraussetzung

$$0 = \operatorname{tr}(xy) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(\lambda_i).$$

Deshalb folgt

$$0 = f(0) = f(\operatorname{tr}(xy)) = \sum_{i=1}^n f(\lambda_i)^2.$$

Demnach ist $f(\lambda_i) = 0$ für alle i im Widerspruch zur Annahme $f \neq 0$. Ist k nicht algebraisch abgeschlossen, so ersetzen wir V durch $V \otimes_k \mathbb{F}$ mit $\mathbb{F} = \overline{k}$, und betrachten anstatt $x, y \in \operatorname{End}(V)$ ihre $\mathbb{F}$-linearen Fortsetzungen in $\operatorname{End}(V \otimes_k \mathbb{F})$. Wir überlassen die Einzelheiten dem Leser. □

Wir kommen nun zum linearen Fall des sogenannten Cartan-Kriteriums.

SATZ 2.2.9. *Sei $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ eine lineare Lie Algebra über einem Körper k der Charakteristik Null. Dann ist $\mathfrak{g}$ genau dann auflösbar, wenn* $\operatorname{tr}(xy) = 0$ *für alle $x \in \mathfrak{g}$ und alle $y \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.*

BEWEIS. Wir dürfen annehmen, daß k algebraisch abgeschlossen ist, denn andernfalls ersetzen wir V durch $V \otimes_k \mathbb{F}$ und $\mathfrak{g}$ durch $\mathfrak{g} \otimes_k \mathbb{F}$ mit $\mathbb{F} = \overline{k}$.
Ist $\mathfrak{g}$ auflösbar, so können wir $\mathfrak{g}$ nach dem Satz von Lie mit einer Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{t}_n(k)$ identifizieren und $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ mit einer Unteralgebra von $\mathfrak{n}_n(k)$. Aber für $x \in \mathfrak{t}_n(k)$ und $y \in \mathfrak{n}_n(k)$ gilt $\operatorname{tr}(xy) = 0$. Das Argument ist das gleiche wie in Lemma 2.2.4.
Es gelte umgekehrt $\operatorname{tr}(xy) = 0$ für alle $x \in \mathfrak{g}$ und $y \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Es genügt zu zeigen, daß $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ nilpotent ist, wegen Korollar 1.6.32. Dann ist $\mathfrak{g}$ auflösbar. Nach dem Satz von Engel ist $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ nilpotent genau dann wenn alle $\operatorname{ad}(x)$ für $x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ nilpotent sind. Wir zeigen, daß alle $x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$

nilpotent sind. Lemma 2.1.8 besagt, daß dann auch alle $\mathrm{ad}(x)$ nilpotent sind. Wir fixieren ein beliebiges $x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Wir wollen nun Satz 2.2.8 mit $E = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ und $F = \mathfrak{g}$ anwenden, mit $\mathfrak{g} \subset M = \{y \in \mathrm{End}(V) \mid [y, \mathfrak{g}] \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]\}$. Dazu müssen wir $\mathrm{tr}(xy) = 0$ für alle $y \in M$ zeigen. Nun ist x Summe von Kommutatoren, und die Spur ist linear. Es reicht also, $\mathrm{tr}([a, b]y) = 0$ mit $a, b \in \mathfrak{g}$ für alle $y \in M$ zu zeigen. Wegen der Invarianz der Spurform gilt $\mathrm{tr}([a, b]y) = \mathrm{tr}(a[b, y])$. Wir haben $[b, y] \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ wegen $y \in M$. Nach Voraussetzung ist diese Spur auf der rechten Seite aber immer Null, und Satz 2.2.8 besagt, daß $x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ nilpotent ist. □

Korollar 2.2.10. *Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie Algebra über einem Körper k der Charakteristik Null. Dann ist $\mathfrak{g}$ genau dann auflösbar, wenn $\kappa(\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = 0$ ist.*

Beweis. Ist $\mathfrak{g}$ auflösbar, so ist auch $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ als homomorphes Bild auflösbar. Das bedeutet nach obigem Satz $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}(x)\,\mathrm{ad}(y)) = 0$ für alle $x \in \mathfrak{g}$ und alle $y \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.
Ist umgekehrt $\kappa(\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = 0$, so ist $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ nach dem Cartan-Kriterium auflösbar. Wegen $\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \cong \mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$ ist damit auch $\mathfrak{g}$ auflösbar. □

Bemerkung 2.2.11. Die Bedingung $\kappa(\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = 0$ kann man auch als $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^{\perp} = \mathfrak{g}$ schreiben. Es bedeutet $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}(x)\,\mathrm{ad}(y)) = 0$ für alle $x \in \mathfrak{g}$ und alle $y \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Im allgemeinen gilt $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^{\perp} = \mathrm{rad}(\mathfrak{g})$, wie man leicht zeigen kann. Dabei ist natürlich vorausgesetzt, daß $\mathfrak{g}$ endlich-dimensional ist. Es gilt auch, daß $\mathfrak{g}$ genau dann auflösbar ist, wenn $\kappa_\rho(\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = 0$ ist, wobei ρ eine endlich-dimensionale Darstellung von $\mathfrak{g}$ ist.

Ein weiteres Kriterium von Cartan betrifft die Halbeinfachheit von $\mathfrak{g}$:

Satz 2.2.12. *Sei $\mathfrak{g}$ eine endlich-dimensionale Lie Algebra über einem Körper k der Charakteristik Null. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*
(1) *$\mathfrak{g}$ ist halbeinfach.*
(2) *Das aufösbare Radikal $\mathrm{rad}(\mathfrak{g})$ ist Null.*
(3) *Die Killingform auf $\mathfrak{g}$ ist nicht ausgeartet.*

Beweis. (1) ⇒ (2): Das ist genau die Aussage von Lemma 1.6.22.
(2) ⇒ (3): Sei $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}^{\perp}$ der Orthogonalraum von $\mathfrak{g}$ bezüglich κ. Dann ist $\mathfrak{a}$ ein Ideal in $\mathfrak{g}$ wegen Korollar 2.2.7. Wir behaupten, daß $\kappa_{\mathfrak{a}}(x, y) = \kappa(x, y)$ gilt für alle $x, y \in \mathfrak{a}$: Die Endomorphismen $\mathrm{ad}(x)$ und $\mathrm{ad}(y)$ bilden $\mathfrak{g}$ nach $\mathfrak{a}$ ab. Somit gilt dies auch für $\mathrm{ad}(x)\,\mathrm{ad}(y)$. Daher ist

$$\begin{aligned}\kappa_{\mathfrak{a}}(x, y) &= \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(x)_{\mathfrak{a}}\,\mathrm{ad}(y)_{\mathfrak{a}}) = \mathrm{tr}((\mathrm{ad}(x)\,\mathrm{ad}(y))_{\mathfrak{a}}) \\ &= \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(x)\,\mathrm{ad}(y)) = \kappa(x, y).\end{aligned}$$

Also folgt

$$\kappa_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{a}, [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]) = \kappa(\mathfrak{a}, [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]) \subset \kappa(\mathfrak{a}, \mathfrak{g}) = 0.$$

Nach Korollar 2.2.10 ist $\mathfrak{a}$ also auflösbar. Damit ist $\mathfrak{a} \subset \mathrm{rad}(\mathfrak{g}) = 0$ und κ nicht ausgeartet.
(3) ⇒ (2): Sei $\mathfrak{a}$ ein abelsches Ideal in $\mathfrak{g}$. Für $x \in \mathfrak{a}$ und $y \in \mathfrak{g}$ ist $\mathrm{im}(\mathrm{ad}(x)\,\mathrm{ad}(y))$ eine Unteralgebra von $\mathfrak{a}$ und somit $(\mathrm{ad}(x)\,\mathrm{ad}(y))^2 = 0$, da $\mathfrak{a}$ abelsch ist. Somit ist $\mathrm{ad}(x)\,\mathrm{ad}(y)$ nilpotent und $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}(x)\,\mathrm{ad}(y)) = 0$. Es gilt also $\kappa(\mathfrak{a}, \mathfrak{g}) = 0$. Da κ nicht ausgeartet ist, folgt $\mathfrak{a} = 0$. Also ist $\mathrm{rad}(\mathfrak{g}) = 0$.
(2) ⇒ (1): Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal in $\mathfrak{g}$. Dann ist $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}^{\perp} \cap \mathfrak{a}$ ein Ideal in $\mathfrak{g}$. Die Restriktion von κ auf $\mathfrak{b} \times \mathfrak{b}$ verschwindet: für $a, b \in \mathfrak{b}$ und $x \in \mathfrak{g}$ gilt $[b, x] \in \mathfrak{b}$, also insbesondere $[b, x] \in \mathfrak{a}^{\perp}$ und $\kappa([a, b], x) = \kappa(a, [b, x]) = 0$. Nach Korollar 2.2.10 ist $\mathfrak{b}$ auflösbar, also $\mathfrak{b} \subset \mathrm{rad}(\mathfrak{g}) = 0$. Das bedeutet $\mathfrak{a}^{\perp} \cap \mathfrak{a} = 0$. Wie wir schon gezeigt haben, folgt aus (2), daß κ nicht ausgeartet ist.

Also ist $\dim \mathfrak{a}^\perp = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{a}$, und deshalb $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^\perp$ eine direkte Summe von Idealen. Damit ist $\mathfrak{g}$ reduktiv. Da aber $Z(\mathfrak{g}) \subset \operatorname{rad}(\mathfrak{g}) = 0$ ist, muß $\mathfrak{g}$ sogar halbeinfach sein, siehe Satz 1.4.5. □

Bemerkung 2.2.13. Die Folgerung (1) $\Rightarrow$ (3) ist in Charakteristik $p > 0$ im allgemeinen nicht gültig. Hingegen folgt (3) $\Rightarrow$ (1) auch in Charakteristik p.

Im Beweis oben haben wir auch folgende Tatsache gezeigt, die wir explizit als Lemma formulieren wollen:

Lemma 2.2.14. *Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal in $\mathfrak{g}$. Dann ist die Killingform $\kappa_{\mathfrak{a}}$ von $\mathfrak{a}$ die Restriktion der Killingform κ von $\mathfrak{g}$ auf $\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}$.*

Korollar 2.2.15. *Sei $n \geq 2$ und k ein Körper der Charakteristik Null. Dann ist die Lie Algebra $\mathfrak{sl}_n(k)$ halbeinfach.*

Beweis. Nach dem Cartan-Kriterium genügt es zu zeigen, daß die Killingform auf $\mathfrak{sl}_n(k)$ nicht-ausgeartet ist. Sei also $X = (x_{ij}) \in \mathfrak{sl}_n(k)$ gegeben mit $\kappa(X, Y) = 0$ für alle $Y \in \mathfrak{sl}_n(k)$. Es gilt $\kappa(X, Y) = 2n \operatorname{tr}(XY)$, wie man explizit nachrechnen kann. Für $Y = E_{ij}$ mit $i \neq j$ folgt deshalb

$$0 = \kappa(X, E_{ij}) = 2n x_{ji}.$$

Wegen $2n \neq 0$ folgt, daß X eine Diagonalmatrix ist. Für $Y = E_{ii} - E_{jj}$ erhalten wir

$$0 = \kappa(X, E_{ii} - E_{jj}) = 2n(x_{ii} - x_{jj})$$

für $1 \leq i, j \leq n$. Also ist $X = \lambda E_n$. Wegen $\operatorname{tr}(X) = 0$ folgt $X = 0$. Damit ist κ nicht-ausgeartet. □

Korollar 2.2.16. *Die Lie Algebra $\mathfrak{g}/\operatorname{rad}(\mathfrak{g})$ ist halbeinfach.*

Beweis. Wegen Lemma 1.6.21 ist $\operatorname{rad}(\mathfrak{s}) = 0$ für $\mathfrak{s} = \mathfrak{g}/\operatorname{rad}(\mathfrak{g})$. Satz 2.2.12 besagt, daß $\mathfrak{s}$ halbeinfach ist. □

Satz 2.2.17. *Sei $\mathfrak{g}$ eine endlich-dimensionale Lie Algebra über einem Körper k der Charakteristik Null, und $\mathfrak{a}$ ein halbeinfaches Ideal in $\mathfrak{g}$. Dann ist $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^\perp$ und $\mathfrak{a}^\perp$ ist der Zentralisator von $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{g}$.*

Beweis. Da $\mathfrak{a}$ halbeinfach ist, ist die Killingform $\kappa_{\mathfrak{a}} = \kappa_{|\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}}$ von $\mathfrak{a}$ nicht ausgeartet. Wie oben folgt, daß $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^\perp$ die direkte Summe von Idealen ist. Wegen $Z(\mathfrak{a}) = 0$ ist der Zentralisator von $\mathfrak{a}$ gleich $\mathfrak{a}^\perp$, also $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}^\perp$. □

Korollar 2.2.18. *Es sei $\mathfrak{g}$ eine endlich-dimensionale halbeinfache Lie Algebra über einem Körper k der Charakteristik Null. Dann gilt $\operatorname{Der}(\mathfrak{g}) = \operatorname{ad}(\mathfrak{g})$, d.h., alle Derivationen von $\mathfrak{g}$ sind innere Derivationen.*

Beweis. Wir wenden Satz 2.2.17 für die Lie Algebra $\operatorname{Der}(\mathfrak{g})$ an. Wegen $Z(\mathfrak{g}) = 0$ ist $\operatorname{ad}(\mathfrak{g}) \cong \mathfrak{g}$ ein halbeinfaches Ideal in $\operatorname{Der}(\mathfrak{g})$. Also ist $\operatorname{Der}(\mathfrak{g}) = \operatorname{ad}(\mathfrak{g}) \oplus \operatorname{ad}(\mathfrak{g})^\perp$. Aber $\operatorname{ad}(\mathfrak{g})^\perp$ ist der Zentralisator von $\operatorname{ad}(\mathfrak{g})$ in $\operatorname{Der}(\mathfrak{g})$ nach Satz 2.2.17, und der ist Null: für $D \in \operatorname{ad}(\mathfrak{g})^\perp$ gilt

$$\operatorname{ad}(D(x)) = [D, \operatorname{ad}(x)] = 0 \quad \forall\, x \in \mathfrak{g}.$$

Da ad injektiv ist, folgt $D = 0$ und somit $\operatorname{ad}(\mathfrak{g})^\perp = 0$. □

2.3. Der Satz von Weyl

Der Satz von Weyl ist ein zentrales Resultat der Darstellungstheorie halbeinfacher Lie Algebren. Wir nehmen hier stets an, daß sowohl die Lie Algebra wie auch ihre Darstellungen endlich-dimensional sind. Der ursprüngliche Beweis von Weyl verwendet Integration auf kompakten Lie Gruppen. Ein rein algebraischer Beweis wurde erst in den 30er Jahren von van der Waerden gefunden, nach Vorarbeit von Hedrik Casimir (theoretischer Physiker, Holländer, 1909-2000). Brauer fand 1937 einen weiteren, vereinfachten Beweis. Im Rahmen von Lie Algebra Kohomologie bewies Whitehead den Satz erneut.
Wir wollen jetzt einen solchen algebraischen Beweis vorführen. Ein wesentliches Hilfsmittel dazu sind die Casismir-Elemente, die man nicht-ausgearteten invarianten Bilinearformen zuordnet. Sei β eine solche Bilinearform. Das Radikal von β ist definiert als $\mathrm{rad}(\beta) = \{x \in \mathfrak{g} \mid \beta(x, y) = 0 \;\forall\, y \in \mathfrak{g}\}$. Die Nicht-Ausartung von β bedeutet $\mathrm{rad}(\beta) = 0$. In diesem Fall gibt es zu einer Basis $(x_1, \dots, x_n)$ von $\mathfrak{g}$ eine eindeutig bestimmte duale Basis $(x^1, \dots, x^n)$ bezüglich β, die durch $\beta(x_i, x^j) = \delta_{ij}$ definiert ist.

Lemma 2.3.1. *Sei β eine nicht-ausgeartete invariante Bilinearform auf der Lie Algebra $\mathfrak{g}$ mit Basis $(x_1, \dots, x_n)$ und $(x^1, \dots, x^n)$ die duale Basis bezüglich β. Sei $\rho\colon \mathfrak{g} \to A$ ein Homomorphismus in eine assoziative Algebra, also mit $\rho([x, y]) = \rho(x)\rho(y) - \rho(y)\rho(x) = [\rho(x), \rho(y)]$. Dann kommutiert das Element*

$$\Omega(\beta, \rho) = \sum_{j=1}^{n} \rho(x^j)\rho(x_j)$$

aus A mit allen $\rho(x)$.

Beweis. Sei $z \in \mathfrak{g}$. Dann können wir schreiben

$$[z, x_j] = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} x_k,$$
$$[z, x^j] = \sum_{k=1}^{n} a^{jk} x^k$$

mit $a_{kj}, a^{jk} \in k$. Es gilt

$$a_{kj} = \beta([z, x_j], x^k) = -\beta(x_j, [z, x^k]) = -a^{kj}.$$

Wir haben

$$\rho(x^j)\rho(x_j)\rho(z) - \rho(z)\rho(x^j)\rho(x_j) = \rho(x^j)\Big(\rho(x_j)\rho(z) - \rho(z)\rho(x_j)\Big) - \Big(\rho(z)\rho(x^j) - \rho(x^j)\rho(z)\Big)\rho(x_j).$$

Damit folgt dann, mit $\Omega = \Omega(\beta, \rho)$,

$$\begin{aligned}
\Omega\rho(z) - \rho(z)\Omega &= \sum_{j=1}^{n} \rho(x^j)\rho(x_j)\rho(z) - \rho(z)\rho(x^j)\rho(x_j) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \rho(x^j)[\rho(x_j), \rho(z)] - [\rho(z), \rho(x^j)]\rho(x_j) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \rho(x^j)\rho([x_j, z]) - \rho([z, x^j])\rho(x_j) \\
&= \sum_{j,k=1}^{n} -a_{kj}\rho(x^j)\rho(x_k) - a^{jk}\rho(x^k)\rho(x_j) \\
&= \sum_{j,k=1}^{n} a^{kj}\rho(x^j)\rho(x_k) - a^{jk}\rho(x^k)\rho(x_j) \\
&= \sum_{j,k=1}^{n} a^{kj}\rho(x^j)\rho(x_k) - \sum_{j,k=1}^{n} a^{kj}\rho(x^j)\rho(x_k) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

Definition 2.3.2. Sei β eine nicht ausgeartete invariante Bilinearform auf $\mathfrak{g}$ und ρ eine Darstellung von $\mathfrak{g}$ wie oben, dann heißt das Element $\Omega(\beta, \rho) \in A$ das *Casismir-Element* zu β und ρ.

Man zeigt, daß $\Omega(\beta, \rho)$ nicht von der Wahl der Basis von $\mathfrak{g}$ abhängt.

Lemma 2.3.3. *Sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Lie Algebra und $\rho\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ eine treue Darstellung von $\mathfrak{g}$. Dann ist $\beta(x, y) = \operatorname{tr}(\rho(x)\rho(y))$ eine symmetrische, nicht-ausgeartete, invariante Bilinearform auf $\mathfrak{g}$.*

Beweis. Eine Spurform ist invariant wegen $\operatorname{tr}([A, B]C) = \operatorname{tr}(A[B, C])$ für $A, B, C \in \operatorname{End}(V)$. Deshalb ist $\operatorname{rad}(\beta)$ ein Ideal in $\mathfrak{g}$. Da ρ injektiv ist gilt $\rho(\operatorname{rad}(\beta)) \cong \operatorname{rad}(\beta)$. Nach Definition des Radikals ist die Spurform aber Null auf dem Radikal, also $\operatorname{rad}(\beta)$ auflösbar nach dem linearen Cartan-Kriterium. Das bedeutet $\operatorname{rad}(\beta) \subset \operatorname{rad}(\mathfrak{g}) = 0$ und β ist nicht-ausgeartet. □

In der Situation des Lemmas können wir das Casimir-Element bezüglich β und ρ mit $A = \operatorname{End}(V)$ definieren. Dann ist ρ eine Lie Algebra Darstellung, und $\Omega(\beta, \rho)$ ist ein Endomorphismus von V, der dann auch *Casimir-Operator* heißt. Man berechnet dann

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(\Omega) &= \sum_{j=1}^{n} \operatorname{tr}(\rho(x_j)\rho(x^j)) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \beta(x_j, x^j) \\
&= \sum_{j=1}^{n} 1 = \dim \mathfrak{g}.
\end{aligned}$$

Insbesondere könnte man $\rho = \mathrm{ad}$ wählen, welches eine treue Darstellung von $\mathfrak{g}$ ist, weil $\mathfrak{g}$ halbeinfach ist und deshalb $\ker(\mathrm{ad}) = Z(\mathfrak{g}) = 0$ gilt. Oder $\mathfrak{g}$ ist bereits eine halbeinfache lineare Lie Algebra mit $\rho = \mathrm{id}$ injektiv. Wir schauen uns genau so ein Beispiel an:

Beispiel 2.3.4. *Sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(k)$, $V = k^2$ und ρ die identische Abbildung $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$. Sei (x, y, h) die Standardbasis von $\mathfrak{g}$ und β die Spurform auf $\mathfrak{g}$. Dann ist*

$$\Omega(\beta, \mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix}.$$

In der Tat ist die Dualbasis bezüglich β durch $(y, x, \frac{h}{2})$ gegeben. Dann ist

$$\Omega(\beta, \mathrm{id}) = \rho(x)\rho(y) + \rho(y)\rho(x) + \frac{\rho(h)^2}{2} = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix},$$

wenn man sich erinnert (Beispiel 1.2.16), daß

$$\rho(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho(y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho(h) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Es ist kein Zufall, daß Ω hier als Skalar operiert, d.h., als $\lambda \cdot \mathrm{id}$ mit $\lambda \in k$. Die Darstellung ρ ist nämlich einfach und Ω kommutiert mit allen $\rho(x)$ nach Lemma 2.3.1. Nach dem Lemma von Schur 1.2.31 ist $\Omega = \lambda \cdot \mathrm{id}$. In der Tat ist hier $\lambda = \frac{3}{2} = \frac{\dim \mathfrak{g}}{\dim V}$.
Wir wollen noch ein Lemma erwähnen, dessen Beweis man leicht mit dem Schurschen Lemma führen kann, siehe etwa [**19**].

Lemma 2.3.5. *Sei $\mathfrak{g}$ eine einfache Lie Algebra sind $\alpha(x, y)$ und $\beta(x, y)$ zwei symmetrische, nicht-ausgeartete, invariante Bilinearformen auf $\mathfrak{g}$, dann gibt es einen von Null verschiedenen Skalar $\mu \in k^*$ mit $\alpha(x, y) = \mu\beta(x, y)$ für alle $x, y \in \mathfrak{g}$.*

Insbesondere ist die Killingform ein skalares Vielfaches der Spurform für einfache lineare Lie Algebren. Wir haben das für einige Algebren in folgender Tabelle zusammengefaßt, die bis auf $\mathfrak{gl}(n)$ einfach sind.

$\mathfrak{g}$	$\kappa(x, y)$
$\mathfrak{gl}(n)$, $n \geq 2$	$2n\,\mathrm{tr}(xy) - 2\,\mathrm{tr}(x)\,\mathrm{tr}(y)$
$\mathfrak{sl}(n)$, $n \geq 2$	$2n\,\mathrm{tr}(xy)$
$\mathfrak{so}(n)$, $n \geq 3$	$(n-2)\,\mathrm{tr}(xy)$
$\mathfrak{sp}(2n)$, $n \geq 1$	$2(n+1)\,\mathrm{tr}(xy)$

Bemerkung 2.3.6. Eine interessante Frage ist, ob man für einfache Matrix Lie Algebren auch $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}^2(x)\,\mathrm{ad}^2(y))$ durch die Spurform ausdrücken kann. Wir machen den Ansatz

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}((\mathrm{ad}(x))^2(\mathrm{ad}(y))^2) &= \alpha_n\,\mathrm{tr}(x^2y^2) + \beta_n\,\mathrm{tr}(xyxy) + \gamma_n\,\mathrm{tr}(x^2)\,\mathrm{tr}(y^2) \\ &\quad + \delta_n(\mathrm{tr}(xy))^2. \end{aligned}$$

In der Tat kann man zeigen, daß für alle $x, y \in \mathfrak{sl}(n)$ gilt

$$\mathrm{tr}((\mathrm{ad}(x))^2(\mathrm{ad}(y))^2) = 2n\,\mathrm{tr}(x^2y^2) + 2\,\mathrm{tr}(x^2)\,\mathrm{tr}(y^2) + 4(\mathrm{tr}(xy))^2.$$

Man beachte aber, daß für $n < 4$ eine solche Darstellung nicht eindeutig ist. Für $n = 3$ liefert obiger Ansatz zum Beispiel die Gleichungen

$$\begin{aligned} \beta_3 + \delta_3 &= 4 \\ \alpha_3 + \beta_3 + 2\gamma_3 + 2\delta_3 &= 18 \\ \alpha_3 + \beta_3 + 4\gamma_3 + \delta_3 &= 18. \end{aligned}$$

Dieses lineare Gleichungssystem ist nicht eindeutig lösbar. Für $\mathfrak{sl}(n)$ mit $n \geq 4$ erhalten wir aus unserem Ansatz die Gleichungen

$$\begin{aligned} \beta_n + \delta_n &= 4 \\ \alpha_n + \beta_n + 2\gamma_n + 2\delta_n &= 2n + 12 \\ \alpha_n + \beta_n + 4\gamma_n + \delta_n &= 2n + 12 \\ \gamma_n &= 2 \end{aligned}$$

welches die oben angegebene eindeutige Lösung besitzt. Man erhält diese Gleichungen durch explizites Ausrechnen bezüglich der Standardbasis von $\mathfrak{sl}(n)$. Dabei rechnet man die adjungierte Darstellung mit der Formel (1.1) aus. Für die Elemente $h_i = E_{ii} - E_{i+1,i+1}$ zum Beispiel ist $\operatorname{ad}(h_i)$ eine Diagonalmatrix mit $2(n-2)$ Einsen, $2(n-2)$ mal -1, einmal 2, einmal -2 und sonst Nullen auf der Diagonalen. Also ist $\operatorname{ad}^2(h_i)$ eine Diagonalmatrix mit $4(n-2)$ Einsen und 2 Vieren auf der Diagonale, hat also die Spur $4n$. Entsprechend gilt $\operatorname{tr}(\operatorname{ad}^4(h_i)) = 4n + 24$. Setzt man also in unserem Ansatz $x = y = h_i$ ein, so erhält man

$$4n + 24 = 2\alpha_n + 2\beta_n + 4\gamma_n + 4\delta_n.$$

Das ist genau die zweite Gleichung von oben, sofern $2 \neq 0$ gilt.
Man kann auch zeigen, daß für alle $x, y \in \mathfrak{so}(n)$ gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}((\operatorname{ad}(x))^2(\operatorname{ad}(y))^2) = {} & (n-6)\operatorname{tr}(x^2y^2) - 2\operatorname{tr}(xyxy) + \operatorname{tr}(x^2)\operatorname{tr}(y^2) \\ & + 2(\operatorname{tr}(xy))^2. \end{aligned}$$

Kommen wir nun zum Satz von Weyl zurück.

Theorem 2.3.7 (Weyl). *Sei $\rho\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ eine Darstellung einer halbeinfachen Lie Algebra der Charakteristik Null. Dann ist ρ halbeinfach.*

Beweis. (1): Zunächst ist V halbeinfach als $\mathfrak{g}$-Modul genau dann wenn V halbeinfach als $\rho(\mathfrak{g})$-Modul ist. Mit anderen Worten, wir können $\mathfrak{g}$ durch $\rho(\mathfrak{g})$ ersetzen und sofort annehmen, daß wir $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ und $\rho = \mathrm{id}$ haben. Dann ist $\beta(x, y) = \operatorname{tr}(xy)$ eine symmetrische invariante Bilinearform, die nicht ausgeartet ist, weil $\operatorname{rad}(\beta)$ ein auflösbares Ideal ist, nach dem linearen Cartan-Kriterium. Also ist $\operatorname{rad}(\beta) \subset \operatorname{rad}(\mathfrak{g}) = 0$. Damit können wir das assoziierte Casismir-Element $\Omega = \sum_{j=1}^n \rho(x_j)\rho(x^j) \in \operatorname{End}(V)$ definieren und Ω liegt in $\operatorname{End}_{\mathfrak{g}}(V) = \{A \in \operatorname{End}(V) \mid Ax = xA \ \forall x \in \mathfrak{g}\}$ mit $\operatorname{tr}(\Omega) = \dim \mathfrak{g} = n$. Man beachte, daß Ax und xA Produkte von Endomorphismen sind. Ist jetzt ρ eine einfache Darstellung, so ist Ω ein Automorphismus von V: es gilt $\operatorname{tr}(\Omega) \neq 0$, weil $\mathfrak{g} \neq 0$ und $\operatorname{char}(k) = 0$ ist. Also ist $\Omega \neq 0$ und das Lemma von Schur liefert uns $\Omega = \lambda \cdot \mathrm{id}$ mit $\lambda \neq 0$.

(2): Sei jetzt $W \subset V$ eine Unterdarstellung der Kodimension 1. Wir zeigen, daß W ein Komplement besitzt. Wegen $\dim V/W = 1$ operiert $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ trivial auf V/W, denn alle Kommutatoren von Endomorphismen eines 1-dimensionalen Vektorraums verschwinden.

(a): Wir zeigen dazu zuerst, daß wir W als einfach voraussetzen dürfen. Denn wenn die Behauptung in (2) für alle einfachen Moduln gilt, zeigen wir mit Induktion über $\dim V$, daß sie dann allgemein gilt. Dazu sei $0 \neq V_1 \subset V$ ein *minimaler* Untermodul. Ist V einfach, ist nichts zu zeigen. Also sei V nicht einfach, und somit $V_1 \neq V$. Ist $V_1 \cap W = 0$, so ist V_1 bereits ein Modulkomplement für W, weil dann $W + V_1 = V$ gilt wegen $\dim V/W = 1$. Ist $V_1 \cap W \neq 0$, so folgt $V_1 \subset W$ aus der Minimalität von V_1. Nun wenden wir die Induktionsvoraussetzung auf V/V_1 an: der Untermodul W/V_1 der Kodimension 1 hat ein Modulkomplement U, das wir als

$$U = U'/V_1$$

schreiben können für einen Untermodul $U' \supset V_1$ von V. Wir haben also $W/V_1 \oplus U'/V_1 = V/V_1$ mit $\dim U'/V_1 = 1$. Damit ist $V_1 \subset U'$ ein einfacher Untermodul der Kodimension 1. Dafür können wir aber die Behauptung (2) anwenden und finden ein Modulkomplement V_2 zu V_1 in U', also $V_1 \oplus V_2 = U'$. Dann ist V_2 ein Modulkomplement zu W in V, also $V = W \oplus V_2$, weil $\dim W + \dim V_2 = (\dim V - 1) + 1 = \dim V$ und $W \cap V_2 = 0$.

(b): Wir zeigen, daß $\mathfrak{g}$ treu auf W operiert. Sei $\mathfrak{a} = \{x \in \mathfrak{g} \mid x.W = 0\}$. Das ist ein Ideal. Da $\mathfrak{g}$ halbeinfach ist, ist auch $\mathfrak{a}$ halbeinfach, d.h. $\mathfrak{a} = [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]$. Wegen $\mathfrak{g}.(V/W) = 0$ ist $\mathfrak{g}.V \subset W$, also $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = 0$, denn für $x, y \in \mathfrak{a}$ ist $xy.V \subset x.W = 0$. Damit ist $\mathfrak{a} = 0$ und somit die Darstellung von $\mathfrak{g}$ auf W treu.

(c): Sei W also einfach, siehe (a). Sei ρ_V die Darstellung von $\mathfrak{g}$ auf V und ρ_W die Einschränkung auf W. Letztere ist treu, siehe (b). Damit können wir den Casismir-Operator $\Omega_W \in \operatorname{End}(V)$ definieren, der zu der Form $\kappa_{\rho_W}(x, y) = \operatorname{tr}(\rho_W(x)\rho_W(y))$ gehört. Wegen (1) ist Ω_W auf dem einfachen Modul W injektiv, weil er dort als Skalar ungleich Null operiert. Also ist $\ker(\Omega_W)$ ein 1-dimensionaler $\mathfrak{g}$-Untermodul von V, der trivialen Schnitt mit W hat: $V = W \oplus \ker(\Omega_W)$. Das gesuchte Komplement zu W in V ist also $\ker(\Omega_W)$.

(3): Jetzt können wir den allgemeinen Fall angehen, wo $W \subset V$ ein beliebiger Untermodul ist. Der Raum $\operatorname{Hom}(V, W)$ wird durch

$$x.\varphi = \rho_W(x) \circ \varphi - \varphi \circ \rho_V(x), \quad x \in \mathfrak{g}, \varphi \in \operatorname{Hom}(V, W)$$

zu einem $\mathfrak{g}$-Modul. Der Raum

$$U = \{\varphi \in \operatorname{Hom}(V, W) \mid \varphi_{|W} \in k \cdot \operatorname{id}_W\}$$

ist dann ein $\mathfrak{g}$-Untermodul, denn für $\varphi \in U$ gilt sogar $(x.\varphi)(W) = 0$: wir erhalten nämlich mit $\varphi_{|W} = \lambda \cdot \operatorname{id}_W$ und $w \in W$

$$\begin{aligned}(x.\varphi)(w) &= x.\varphi(w) - \varphi(x.w) \\ &= x.(\lambda w) - \lambda x.w \\ &= 0.\end{aligned}$$

Damit ist $U_0 = \{\varphi \in U \mid \varphi(W) = 0\}$ ein Untermodul von U mit $\dim U/U_0 = 1$. Mit (2) finden wir deshalb ein $\psi \in U$ mit $k\psi \oplus U_0 = U$. Nach geeigneter Skalarmultiplikation dürfen wir $\psi_{|W} = \operatorname{id}_W$ annehmen. Dann ist der 1-dimensionale $\mathfrak{g}$-Modul $k\psi$ trivial, also gilt $x.\psi = 0$ und damit $x.\psi(v) - \psi(x.v) = (x.\psi)(v) = 0$. Demnach ist ψ ist ein $\mathfrak{g}$-Modulhomomorphismus und deshalb $\ker(\psi)$ ein Untermodul von V. Aber dann ist $\ker(\psi)$ in V ein zu W komplementärer Untermodul, d.h., $V = \ker(\psi) \oplus W$. □

Bemerkung 2.3.8. Es gilt auch die Umkehrung des Theorems von Weyl. Wenn *jede* endlich-dimensionale Darstellung von $\mathfrak{g}$ halbeinfach ist, so ist $\mathfrak{g}$ halbeinfach. Das Argument ist wie folgt. Da die adjungierte Darstellung halbeinfach ist, hat jedes Ideal in $\mathfrak{g}$ ein komplementäres Ideal, kann also als Quotient von $\mathfrak{g}$ angesehen werden. Angenommen, $\mathfrak{g}$ wäre nicht halbeinfach. Dann hätte $\mathfrak{g}$ einen kommutativen Quotienten, also einen 1-dimensionalen Quotienten k. Doch die Lie Algebra $\mathfrak{g} = k$ hat auch Darstellungen, die nicht halbeinfach sind, siehe Beispiel 1.2.28. Das ist ein Widerspruch.

2.4. Der Satz von Levi

In diesem Abschnitt seien alle Lie Algebren endlich-dimensional über einem Körper der Charakteristik Null. Der Satz von Levi besagt, daß es in einer Lie Algebra $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Unteralgebra $\mathfrak{s}$ gibt, ein sogenanntes *Levi-Komplement*, mit $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{s} \ltimes \operatorname{rad}(\mathfrak{g})$. Mit anderen Worten, die kurze exakte Sequenz von Lie Algebren

$$0 \to \operatorname{rad}(\mathfrak{g}) \to \mathfrak{g} \to \mathfrak{s} \to 0$$

spaltet. Dann ist $\mathfrak{s} \cong \mathfrak{g}/\operatorname{rad}(\mathfrak{g})$. Ein Levi-Komplement ist nicht eindeutig. Der Satz von Malcev besagt aber, daß alle Levi-Komplemente unter speziellen Automorphismen von $\mathfrak{g}$ zueinander konjugiert sind. Die Existenz von Levi-Komplementen reduziert die Klassifikation von Lie Algebren im wesentlichen auf die der halbeinfachen und auflösbaren Lie Algebren. Wir benötigen zum Beweis des Satzes von Levi noch folgende Lemmata:

Lemma 2.4.1. *Sei $\alpha\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ ein surjektiver Homomorphismus von Lie Algebren. Dann gilt $\alpha(\operatorname{rad}(\mathfrak{g})) = \operatorname{rad}(\mathfrak{h})$.*

Beweis. Da $\operatorname{rad}(\mathfrak{g})$ ein auflösbares Ideal in $\mathfrak{g}$ ist, muß auch $\alpha(\operatorname{rad}(\mathfrak{g}))$ ein auflösbares Ideal in $\mathfrak{h}$ sein, weil α ein surjektiver Homomorphismus ist. Also gilt $\alpha(\operatorname{rad}(\mathfrak{g})) \subset \operatorname{rad}(\mathfrak{h})$. Die Begründung dafür ist wie folgt. Zunächst ist $\alpha(\operatorname{rad}(\mathfrak{g}))$ ein Ideal in $\mathfrak{h}$, weil

$$[\mathfrak{h}, \alpha(\operatorname{rad}(\mathfrak{g}))] = [\alpha(\mathfrak{g}), \alpha(\operatorname{rad}(\mathfrak{g}))] = \alpha([\mathfrak{g}, \operatorname{rad}(\mathfrak{g})]) \subset \alpha(\operatorname{rad}(\mathfrak{g}))$$

gilt. Es ist auflösbar, weil homomorphe Bilder auflösbarer Lie Algebren wieder auflösbar sind. Für die Umkehrung betrachten wir den Quotientenhomomorphismus $\pi\colon \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}/\alpha(\operatorname{rad}(\mathfrak{g}))$ und den Homomorphismus $\beta = \pi \circ \alpha\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}/\alpha(\operatorname{rad}(\mathfrak{g}))$. Wegen $\operatorname{rad}(\mathfrak{g}) \subset \ker(\beta)$ faktorisiert β zu einem surjektiven Homomorphismus $\beta'\colon \mathfrak{g}/\operatorname{rad}(\mathfrak{g}) \to \mathfrak{h}/\alpha(\operatorname{rad}(\mathfrak{g}))$. Da $\mathfrak{g}/\operatorname{rad}(\mathfrak{g})$ halbeinfach ist wegen Korollar 2.2.16 ist auch $\mathfrak{h}/\alpha(\operatorname{rad}(\mathfrak{g}))$ halbeinfach, als homomorphes Bild von $\mathfrak{g}/\operatorname{rad}(\mathfrak{g})$. Deshalb ist $\pi(\operatorname{rad}(\mathfrak{h})) \subset \operatorname{rad}(\mathfrak{h}/\alpha(\operatorname{rad}(\mathfrak{g}))) = 0$, also $\operatorname{rad}(\mathfrak{h}) \subset \alpha(\operatorname{rad}(\mathfrak{g}))$. ☐

Lemma 2.4.2. *Sei V ein $\mathfrak{g}$-Modul, $\mathfrak{a}$ ein Ideal in $\mathfrak{g}$, und $Z_{\mathfrak{a}}(w) = \{x \in \mathfrak{a} \mid x.w = 0\}$ für $w \in V$. Es sei $v \in V$ ein Element mit $\mathfrak{g}.v = \mathfrak{a}.v$ und $Z_{\mathfrak{a}}(v) = 0$. Dann gilt $\mathfrak{g} \cong Z_{\mathfrak{g}}(v) \ltimes \mathfrak{a}$.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist $Z_{\mathfrak{g}}(v) \cap \mathfrak{a} = Z_{\mathfrak{a}}(v) = 0$, $\mathfrak{a}$ ein Ideal, sowie $Z_{\mathfrak{g}}(v)$ eine Unteralgebra von $\mathfrak{g}$. Wir müssen noch zeigen, daß auch $Z_{\mathfrak{g}}(v) + \mathfrak{a} = \mathfrak{g}$ gilt. Dazu betrachten wir die lineare Abbildung $\varphi\colon \mathfrak{g} \to V$, $x \mapsto x.v$. Wegen $\mathfrak{g}.v = \mathfrak{a}.v$ gilt $\varphi(\mathfrak{g}) = \varphi(\mathfrak{a})$, also $\mathfrak{g} = \ker(\varphi) + \mathfrak{a} = Z_{\mathfrak{g}}(v) + \mathfrak{a}$. ☐

Theorem 2.4.3 (Levi). *Jede kurze exakte Sequenz von Lie Algebren*

$$0 \to \operatorname{rad}(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\iota} \mathfrak{g} \xrightarrow{\alpha} \mathfrak{s} \to 0$$

mit einer halbeinfachen Lie Algebra $\mathfrak{s}$ spaltet, d.h., es gibt einen Homomorphismus $\beta\colon \mathfrak{s} \to \mathfrak{g}$ mit $\alpha \circ \beta = \mathrm{id}_{\mathfrak{s}}$.

Beweis. Es sei $\mathfrak{a} = \ker(\alpha) = \iota(\operatorname{rad}(\mathfrak{g}))$. Wir machen eine Induktion über $\dim \mathfrak{a}$. Für $\mathfrak{a} = 0$ ist α sowohl ein injektiver wie auch surjektiver Homomorphismus. Dann folgt die Behauptung mit $\beta = \alpha^{-1}$. Es sei also $\mathfrak{a} \neq 0$. Wir unterscheiden verschiedene Fälle.

1. Fall: Es gibt ein echtes minimales Ideal $\mathfrak{a}_1$ von $\mathfrak{a}$, also ungleich 0 und $\mathfrak{a}$. Dann faktorisiert α zu einem surjektiven Homomorphismus

$$\alpha_1\colon \mathfrak{g}/\mathfrak{a}_1 \to \mathfrak{s}$$

mit $\dim\ker(\alpha_1) = \dim\mathfrak{a} - \dim\mathfrak{a}_1 < \dim\mathfrak{a} = \dim\ker(\alpha)$. Nach Induktionsvoraussetzung existiert ein Homomorhismus

$$\beta_1\colon \mathfrak{s} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{a}_1 \quad \text{mit} \quad \alpha_1 \circ \beta_1 = \mathrm{id}_{\mathfrak{s}}\,.$$

Sei $q\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{a}_1$ die Quotientenabbildung und

$$\mathfrak{b} = q^{-1}(\beta_1(\mathfrak{s}))$$

das Urbild von $\beta_1(\mathfrak{s})$ unter q. Dann ist $\mathfrak{b}$ eine Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ und der Homomorphismus

$$\widetilde{\alpha} = q\,|_{\mathfrak{b}}\colon \mathfrak{b} \to \beta_1(\mathfrak{s}) \cong \mathfrak{s}, \quad x \mapsto x + \mathfrak{a}_1$$

ist surjektiv. Wegen $\dim\ker(\widetilde{\alpha}) = \dim\mathfrak{a}_1 < \dim\mathfrak{a} = \dim\ker(\alpha)$ existiert nach Induktionsvoraussetzung ein Homomorphismus

$$\widetilde{\beta} = \beta_1(\mathfrak{s}) \to \mathfrak{b} \quad \text{mit} \quad \widetilde{\alpha} \circ \widetilde{\beta} = \mathrm{id}_{\beta_1(\mathfrak{s})}\,.$$

Dann ist aber $\beta = \widetilde{\beta} \circ \beta_1\colon \mathfrak{s} \to \mathfrak{g}$ ein Homomorphismus mit

$$\alpha \circ \beta = \alpha_1 \circ (\widetilde{\alpha} \circ \widetilde{\beta}) \circ \beta_1 = \alpha_1 \circ \beta_1 = \mathrm{id}_{\mathfrak{s}}$$

und wir sind fertig.

2. Fall: Das Ideal $\mathfrak{a}$ ist minimal und von 0 verschieden. Wir haben $\alpha(\mathrm{rad}(\mathfrak{g})) = \mathrm{rad}(\mathfrak{s}) = 0$ wegen Lemma 2.4.1 und weil $\mathfrak{s}$ halbeinfach ist. Also ist $\mathrm{rad}(\mathfrak{g}) \subset \ker(\alpha) = \mathfrak{a}$. Ist $\mathrm{rad}(\mathfrak{g}) = 0$, so ist $\mathfrak{a} = \ker(\alpha) = \iota(0) = 0$, Widerspruch. Sei also $\mathrm{rad}(\mathfrak{g}) \neq 0$. Man wähle $n \geq 1$ maximal mit $\mathrm{rad}(\mathfrak{g})^{(n)} \neq 0$. Das ist ein abelsches Ideal ungleich Null von $\mathfrak{g}$ wegen $0 = \mathrm{rad}(\mathfrak{g})^{(n+1)} = [\mathrm{rad}(\mathfrak{g})^{(n)}, \mathrm{rad}(\mathfrak{g})^{(n)}]$. Da aber $\mathfrak{a}$ minimal war, folgt $\mathfrak{a} \subset \mathrm{rad}(\mathfrak{g})^{(n)}$. Also ist $\mathfrak{a}$ abelsch. Dann enthält die Darstellung

$$\rho\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{a}), \quad x \mapsto \mathrm{ad}(x)\,|_{\mathfrak{a}}$$

also $\mathfrak{a}$ im Kern und faktorisiert daher nach dem Homomorphiesatz zu einer Darstellung von $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ auf $\mathfrak{a}$. Da $\alpha\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{s}$ ein surjektiver Homomorphismus ist, gilt $\mathfrak{g}/\ker(\alpha) = \mathfrak{g}/\mathfrak{a} \cong \mathfrak{s}$. So wird $\mathfrak{a}$ zu einem $\mathfrak{s}$-Modul, der sogar einfach ist, weil $\mathfrak{a}$ minimal ist.

Fall 2a: Sei $\mathfrak{a}$ ein trivialer $\mathfrak{s}$-Modul. Dann ist $\mathfrak{a}$ im Zentrum von $\mathfrak{g}$. Damit ist $\mathfrak{a}$ im Kern der adjungierten Darstellung von $\mathfrak{g}$. Wieder nach dem Homomorphiesatz faktorisiert die adjungierte Darstellung von $\mathfrak{g}$ also zu einer Darstellung von $\mathfrak{s}$. Somit wird $\mathfrak{g}$ zu einem $\mathfrak{s}$-Modul, der halbeinfach ist nach dem Satz von Weyl. Also gibt es ein Komplement zu $\mathfrak{a}$, also ein zu $\mathfrak{a}$ komplementäres Ideal in $\mathfrak{g}$. Damit ist aber $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a} \cong \mathfrak{s} \oplus \mathrm{rad}(\mathfrak{g})$. Daher spaltet die kurze exakte Sequenz im Theorem.

Fall 2b: Sei $\mathfrak{a}$ ein nicht-trivialer $\mathfrak{s}$-Modul. Der Vektorraum $V = \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ wird durch $x.\varphi = [\mathrm{ad}(x), \varphi]$ zu einem $\mathfrak{g}$-Modul. Wir betrachten die folgenden Unterräume $P \subset Q \subset R$ von V:

$$\begin{aligned}
P &= \mathrm{ad}(\mathfrak{a}),\\
Q &= \{\varphi \in V \mid \varphi(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{a},\ \varphi(\mathfrak{a}) = 0\},\\
R &= \{\varphi \in V \mid \varphi(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{a},\ \varphi\,|_{\mathfrak{a}} \in k \cdot \mathrm{id}_{\mathfrak{a}}\}.
\end{aligned}$$

Dabei ist Q der Kern der linearen Abbildung $\chi\colon R \to k$ mit $\varphi\,|_{\mathfrak{a}} = \chi(\varphi) \cdot \mathrm{id}_{\mathfrak{a}}$. Deshalb ist $\dim(R/Q) \leq 1$. Wir zeigen, daß diese Unterräume $\mathfrak{g}$-Untermoduln sind. Sei $y \in \mathfrak{g}$. Für $\mathrm{ad}(x) \in P$ ist $y.\,\mathrm{ad}(x) = [\mathrm{ad}(y), \mathrm{ad}(x)] = \mathrm{ad}([x, y]) \in P$. Deshalb ist P ein Untermodul. Um zu sehen, daß R und Q Untermoduln sind, genügt es $\mathfrak{g}.R \subset Q$ zu zeigen. Sei also $x \in \mathfrak{g}$, $\varphi \in R$ und $\varphi \mid_{\mathfrak{a}} = \lambda \operatorname{id}_{\mathfrak{a}}$. Für $a \in \mathfrak{a}$ ist dann

$$\begin{aligned}(x.\varphi)(a) &= x.\varphi(a) - \varphi([x,a]) \\ &= x.(\lambda a) - \lambda[x,a] \\ &= 0,\end{aligned}$$

also $x.\varphi \in Q$. Das war zu zeigen.
Weiterhin folgt $\mathfrak{a}.R \subset P$, denn für $y \in \mathfrak{a}$ ist $\operatorname{ad}(y)(\mathfrak{a}) = 0$ weil $\mathfrak{a}$ abelsch ist, und deshalb

$$y.\varphi = \operatorname{ad}(y) \circ \varphi - \varphi \circ \operatorname{ad}(y) = -\lambda \operatorname{ad}(y) \in P.$$

Damit operiert das Ideal $\mathfrak{a}$ trivial auf dem Quotientenmodul R/P, der dadurch zu einem $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$-Modul wird, also zu einem $\mathfrak{s}$-Modul. Nach dem Satz von Weyl existiert zu dem Untermodul Q/P von R/P ein Modulkomplement U mit $\dim U = 1$. Es wird von einem $v \in R \setminus Q$ aufgespannt, von dem wir $v \mid_{\mathfrak{a}} = \operatorname{id}_{\mathfrak{a}}$ annehmen dürfen. Wegen $\mathfrak{s} = [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}]$ ist U ein trivialer $\mathfrak{s}$-Modul, also gilt $\mathfrak{g}.v \subset P$. Wir wollen nun Lemma 2.4.2 für dieses v anwenden. Dazu müssen wir nachprüfen, daß die Voraussetzungen des Lemmas erfüllt sind. Für $x \in \mathfrak{a}$ gilt nach obiger Rechnung $x.v = -\lambda \operatorname{ad}(x) = -\operatorname{ad}(x)$. Es sei $x.v = 0$. Dann ist $x \in Z(\mathfrak{g})$. Da $\mathfrak{a}$ nach Voraussetzung ein nicht-trivialer $\mathfrak{s}$-Modul ist, ist $\mathfrak{a}$ ein minimales, nicht-zentrales Ideal von $\mathfrak{g}$. Also folgt $x \in Z(\mathfrak{g}) = 0$. Folglich ist

$$\begin{aligned}Z_{\mathfrak{a}}(v) &= 0, \\ \mathfrak{a}.v &= \operatorname{ad}(\mathfrak{a}) = P = \mathfrak{g}.v.\end{aligned}$$

Aus dem Lemma folgt nun die Behauptung. □

Wir definieren nun ein Levi-Komplement.

Definition 2.4.4. Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie Algebra. Eine Unteralgebra $\mathfrak{s}$ von $\mathfrak{g}$ mit $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{s} \ltimes \operatorname{rad}(\mathfrak{g})$ heißt *Levi-Komplement* in $\mathfrak{g}$.

Korollar 2.4.5. *Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie Algebra. Dann existiert ein Levi-Komplement in $\mathfrak{g}$.*

Beweis. Wir behaupten, daß $\mathfrak{s} = \mathfrak{g}/\operatorname{rad}(\mathfrak{g})$ ein Levi-Komplement in $\mathfrak{g}$ ist. Zunächst ist $\mathfrak{s}$ halbeinfach wegen Korollar 2.2.16. Sei $\alpha \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{s}$ der Quotientenhomomorphismus. Nach dem Satz von Levi gibt es einen Homomorphismus $\beta \colon \mathfrak{s} \to \mathfrak{g}$ mit $\alpha \circ \beta = \operatorname{id}_{\mathfrak{s}}$. Dann ist β injektiv, also $\beta(\mathfrak{s}) \cap \iota(\operatorname{rad}(\mathfrak{g})) = 0$, und $\beta(\mathfrak{s}) + \iota(\operatorname{rad}(\mathfrak{g})) = \mathfrak{g}$. Das bedeutet aber $\mathfrak{g} \cong \beta(\mathfrak{s}) \ltimes \iota(\operatorname{rad}(\mathfrak{g}))$. □

Wir können ein weiteres Korollar erhalten:

Korollar 2.4.6. *Es sei $\mathfrak{s}$ ein Levi-Komplement in $\mathfrak{g}$. Dann gilt*

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \cong \mathfrak{s} \ltimes [\mathfrak{g}, \operatorname{rad}(\mathfrak{g})].$$

Falls $\mathfrak{g}$ reduktiv ist, also $\operatorname{rad}(\mathfrak{g}) = Z(\mathfrak{g})$ gilt, so ist $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ ein Levi-Komplement in $\mathfrak{g}$.

Beweis. Da $\mathfrak{s}$ halbeinfach ist, gilt $[\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] = \mathfrak{s}$. Also folgt, wegen $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} + \operatorname{rad}(\mathfrak{g})$

$$\begin{aligned}[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] &= [\mathfrak{g}, \mathfrak{s}] + [\mathfrak{g}, \operatorname{rad}(\mathfrak{g})] \\ &= [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] + [\operatorname{rad}(\mathfrak{g}), \mathfrak{s}] + [\mathfrak{g}, \operatorname{rad}(\mathfrak{g})] \\ &= \mathfrak{s} + [\mathfrak{g}, \operatorname{rad}(\mathfrak{g})].\end{aligned}$$

Wegen $\mathfrak{s} \cap \operatorname{rad}(\mathfrak{g}) = 0$ ist auch $\mathfrak{s} \cap [\mathfrak{g}, \operatorname{rad}(\mathfrak{g})] = 0$. Für die zweite Aussage beachte man, daß $\operatorname{rad}(\mathfrak{g}) = Z(\mathfrak{g})$ gleichbedeutend mit $[\mathfrak{g}, \operatorname{rad}(\mathfrak{g})] = 0$ ist, also $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \cong \mathfrak{s}$. □

BEISPIEL 2.4.7. *Für* $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(V)$ *ist* $\mathrm{rad}(\mathfrak{g}) = Z(\mathfrak{g}) = k \cdot \mathrm{id}$ *und* $\mathfrak{s} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{sl}(V)$ *ist ein Levi-Komplement in* $\mathfrak{g}$.

Wir kommen nun zum Satz von Malcev. Dazu sei $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ die Gruppe aller Automorphismen von $\mathfrak{g}$, bestehend aus allen bijektiven Lie Algebra Endomorphismen von $\mathfrak{g}$.

LEMMA 2.4.8. *Sei* $\mathfrak{g}$ *eine Lie Algebra und* D *eine nilpotente Derivation von* $\mathfrak{g}$. *Dann ist* e^D *ein Automorphismus von* $\mathfrak{g}$.

BEWEIS. Zunächst ist e^D ein Automorphismus des Vektorraums von $\mathfrak{g}$. Die Reihe bricht ab, weil D nilpotent ist. Das Inverse ist durch die Reihe e^{-D} gegeben. Für $x, y \in \mathfrak{g}$ gilt

$$D^p([x,y]) = \sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} [D^{p-j}(x), D^j(y)],$$

wie man leicht mit Induktion zeigen kann. Dann folgt

$$\begin{aligned} e^D([x,y]) &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} D^p([x,y]) \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{p} \frac{1}{(p-j)!j!} [D^{p-j}(x), D^j(y)] \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{p=j}^{\infty} \frac{1}{(p-j)!j!} [D^{p-j}(x), D^j(y)] \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!j!} [D^p(x), D^j(y)] \\ &= [e^D(x), e^D(y)]. \end{aligned}$$

Also ist $e^D \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$. □

Insbesondere folgt für $D = \mathrm{ad}(x)$ also $e^{\mathrm{ad}(x)} \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$. Dafür gibt es einen besonderen Namen.

DEFINITION 2.4.9. Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie algebra. Ein Automorphismus der Gestalt $e^{\mathrm{ad}(x)}$ mit $x \in \mathrm{nil}(\mathfrak{g})$ heißt *speziell*. Es bezeichne $\mathrm{Aut}_s(\mathfrak{g})$ die Untergruppe von $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, die von allen speziellen Automorphismen erzeugt ist.

Man sieht leicht ein, daß $\mathrm{Aut}_s(\mathfrak{g})$ sogar ein Normalteiler in $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ ist.

THEOREM 2.4.10 (Malcev). *Sei* $\mathfrak{g}$ *eine Lie Algebra und* $\mathfrak{s}_1$ *und* $\mathfrak{s}_2$ *zwei Levi-Komplemente in* $\mathfrak{g}$. *Dann existiert ein spezieller Automorphismus* $\varphi = e^{\mathrm{ad}(x)} \in \mathrm{Aut}_s(\mathfrak{g})$ *mit* $x \in [\mathfrak{g}, \mathrm{rad}(\mathfrak{g})] \subset \mathrm{nil}(\mathfrak{g})$, *so daß* $\varphi(\mathfrak{s}_1) = \mathfrak{s}_2$.

Für einen Beweis siehe zum Beispiel [**5**]. Dort wird unter anderem der Satz von Weyl verwendet. Wir formulieren noch einige interessante Korollare.

KOROLLAR 2.4.11. *Jede halbeinfache Unteralgebra* $\mathfrak{h}$ *von* $\mathfrak{g}$ *ist in einem Levi-Komplement von* $\mathfrak{g}$ *enthalten.*

Beweis. Sei $\mathfrak{a} = \operatorname{rad}(\mathfrak{g}) + \mathfrak{h}$. Dann ist $\mathfrak{a}$ eine Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ und $\operatorname{rad}(\mathfrak{g})$ ist ein auflösbares Ideal in $\mathfrak{a}$. Weiterhin ist

$$\mathfrak{a}/\operatorname{rad}(\mathfrak{g}) \cong \mathfrak{h}/(\mathfrak{h} \cap \operatorname{rad}(\mathfrak{g}))$$

ein Quotient von $\mathfrak{h}$ und deshalb selbst halbeinfach und hat triviales Radikal. Zusammen folgt $\operatorname{rad}(\mathfrak{g}) = \operatorname{rad}(\mathfrak{a})$. Das Ideal $\mathfrak{h} \cap \operatorname{rad}(\mathfrak{g})$ von $\mathfrak{h}$ ist gleichzeitig halbeinfach und auflösbar, also gleich Null. Damit ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{h} \ltimes \operatorname{rad}(\mathfrak{g})$ und $\mathfrak{h}$ ist ein Levi-Komplement in $\mathfrak{a}$. Sei $\mathfrak{s}$ nun ein Levi-Komplement in $\mathfrak{g}$. Dann ist

$$\mathfrak{a} = (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{s}) \ltimes \operatorname{rad}(\mathfrak{g}).$$

Weil $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{s} \cong \mathfrak{a}/\operatorname{rad}(\mathfrak{g}) \cong \mathfrak{h}$ halbeinfach ist, ist $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{s}$ eine Levi-Komplement in $\mathfrak{a}$. Nach dem Satz von Malcev existiert also ein $x \in [\mathfrak{a}, \operatorname{rad}(\mathfrak{g})]$ mit

$$e^{\operatorname{ad}(x)}(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{s}) = \mathfrak{h}.$$

Also ist $\mathfrak{h}$ im Levi-Komplement $\mathfrak{s}' = e^{\operatorname{ad}(x)}(\mathfrak{s})$ von $\mathfrak{g}$ enthalten. □

Korollar 2.4.12. *Die Levi-Komplemente in $\mathfrak{g}$ sind genau die maximal halbeinfachen Unteralgebren von $\mathfrak{g}$.*

Beweis. Jede maximal halbeinfache Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ ist ein Levi-Komplement wegen Korollar 2.4.11. Sei umgekehrt $\mathfrak{s}$ ein Levi-Komplement. Für jede halbeinfache Unteralgebra $\mathfrak{h}$ von $\mathfrak{g}$ gilt aber $\operatorname{rad}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{h} = 0$, also $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{s}$ wegen $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \ltimes \operatorname{rad}(\mathfrak{g})$. □

Korollar 2.4.13. *Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie Algebra mit Levi-Zerlegung $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \ltimes \operatorname{rad}(\mathfrak{g})$ und $\mathfrak{a}$ ein Ideal in $\mathfrak{g}$. Dann ist $\mathfrak{a} = (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{s}) \ltimes (\mathfrak{a} \cap \operatorname{rad}(\mathfrak{g}))$ eine Levi-Zerlegung von $\mathfrak{a}$.*

Beweis. Übungsaufgabe. □

2.5. Cartan-Unteralgebren

Betrachtet man die adjungierte Darstellung einer Lie Algebra $\mathfrak{g}$ und schränkt sie auf eine geeignet gewählte Unteralgebra $\mathfrak{h}$ ein, so liefert die Darstellung $\operatorname{ad}\colon \mathfrak{h} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ wertvolle Informationen über die Struktur der Lie Algebra $\mathfrak{g}$. Für $h \in \mathfrak{g}$ und $\lambda \in k$ sei

$$\mathfrak{g}_\lambda(h) = \{x \in \mathfrak{g} \mid (\operatorname{ad}(h) - \lambda \operatorname{id})^n x = 0 \text{ für ein } n\}$$

der verallgemeinerte Eigenraum von $\operatorname{ad}(h)$ zu λ. Offenbar ist $\mathfrak{g}_\lambda(h) \neq 0$ genau dann, wenn λ ein Eigenwert von $\operatorname{ad}(h)$ ist. Wegen $\operatorname{ad}(h)(h) = 0$ ist $\mathfrak{g}_0(h) \neq 0$. Falls k algebraisch abgeschlossen ist, folgt mit der Jordanzerlegung von $\operatorname{ad}(h)$

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\lambda \in k} \mathfrak{g}_\lambda(h) = \bigoplus_{i=0}^{p} \mathfrak{g}_{\lambda_i}(h)$$

wobei $\lambda_0 = 0, \lambda_1, \ldots, \lambda_p$ die verschiedenen Eigenwerte von $\operatorname{ad}(h)$ sind.

Lemma 2.5.1. *Sei $h \in \mathfrak{g}$. Dann gilt*

$$[\mathfrak{g}_\lambda(h), \mathfrak{g}_\mu(h)] \subset \mathfrak{g}_{\lambda+\mu}(h)$$

für alle $\lambda, \mu \in k$.

Beweis. Es sei $x \in \mathfrak{g}_\lambda(h)$ und $y \in \mathfrak{g}_\mu(h)$. Dann gilt, wie in (2.1), für alle $n \geq 1$

$$(\mathrm{ad}(h) - (\lambda+\mu)E)^n([x,y]) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [(\mathrm{ad}(h) - \lambda E)^k(x), (\mathrm{ad}(h) - \mu E)^{n-k}(y)].$$

Ist also $(\mathrm{ad}(h) - \lambda E)^p(x) = 0$ und $(\mathrm{ad}(h) - \mu E)^q(y) = 0$, so folgt

$$(\mathrm{ad}(h) - (\lambda+\mu)E)^{p+q}([x,y]) = 0.$$

□

Insbesondere gilt:

Korollar 2.5.2. *Der Unterraum $\mathfrak{g}_0(h)$ ist eine Lie Unteralgebra ungleich Null von $\mathfrak{g}$.*

Wir betrachten nun das charakteristische Polynom $P_h(t) = \det(tE - \mathrm{ad}(h))$ von $\mathrm{ad}(h)$. Mit $n = \dim \mathfrak{g}$ können wir das mit polynomialen Funktionen $a_i(h)$ in $h \in \mathfrak{g}$ schreiben als

$$P_h(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i(h) t^i.$$

Da Null ein Eigenwert von $\mathrm{ad}(h)$ ist, folgt $P_h(0) = 0$ und deshalb $a_0 = 0$. Weiterhin ist $a_n = 1$.

Definition 2.5.3. Sei $\mathfrak{g}$ eine endlich-dimensionale Lie Algebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k. Der *Rang* von $\mathfrak{g}$, $\ell = \mathrm{rank}\,\mathfrak{g}$, ist die kleinste Zahl $i \geq 0$ mit $a_i \neq 0$. Ein Element $h \in \mathfrak{g}$ heißt *regulär*, falls $a_\ell(h) \neq 0$.

Offenbar ist $1 \leq \mathrm{rank}\,\mathfrak{g} \leq \dim \mathfrak{g}$. Weil die Multiplizität von Null als Nullstelle von $P_h(t)$ gleich $\dim \mathfrak{g}_0(h)$ ist, gilt $\mathrm{rank}\,\mathfrak{g} \leq \dim \mathfrak{g}_0(h)$. In der Tat ist der Rang von $\mathfrak{g}$ genau die minimale Dimension der Unteralgebra $\mathfrak{g}_0(h)$, wenn h über $\mathfrak{g}$ läuft, d.h.,

$$\mathrm{rank}\,\mathfrak{g} = \min\{\dim \mathfrak{g}_0(h) \mid h \in \mathfrak{g}\}.$$

Die Gleichheit $\mathrm{rank}\,\mathfrak{g} = \dim \mathfrak{g}_0(h)$ gilt genau dann, wenn h regulär ist.

Lemma 2.5.4. *Eine endlich-dimensionale Lie Algebra $\mathfrak{g}$ ist nilpotent genau dann wenn* $\mathrm{rank}\,\mathfrak{g} = \dim \mathfrak{g}$ *gilt.*

Beweis. Wir haben $\mathrm{rank}\,\mathfrak{g} = \dim \mathfrak{g}$ genau dann, wenn alle $\mathrm{ad}(x)$ für $x \in \mathfrak{g}$ nilpotent sind. Die Behauptung folgt mit dem Satz von Engel. □

Es bezeichne $\mathfrak{g}^{reg}$ die Menge der regulären Elemente von $\mathfrak{g}$.

Lemma 2.5.5. *Die Teilmenge $\mathfrak{g}^{reg} \subset \mathfrak{g}$ ist eine nicht-leere dichte Zariski-offene Menge in $\mathfrak{g}$, die unter allen Automorphismen von $\mathfrak{g}$ invariant ist.*

Beweis. Nach Definition ist a_ℓ nicht das Nullpolynom, $\ell = \mathrm{rank}\,\mathfrak{g}$. Also gibt es ein $h \in \mathfrak{g}^{reg}$. Die Menge ist Zariski-offen, weil sich die Bedingung $\dim \mathfrak{g}_0(h) > \mathrm{rank}\,\mathfrak{g}$ durch das Verschwinden der polynomialen Funktionen $a_\ell(h)$ ausdrücken läßt. Für $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ gilt

$$\mathrm{ad}(\varphi(h)) = \varphi \circ \mathrm{ad}(h) \circ \varphi^{-1}.$$

Deshalb folgt

$$\begin{aligned} P_{\varphi(h)}(t) &= \det(tE - \mathrm{ad}(\varphi(h))) \\ &= \det(tE - \varphi \circ \mathrm{ad}(h) \circ \varphi^{-1}) \\ &= \det(\varphi \circ (tE - \mathrm{ad}(h)) \circ \varphi^{-1}) \\ &= P_h(t). \end{aligned}$$

Also folgt $a_\ell(\varphi(h)) = a_\ell(h)$ für alle $h \in \mathfrak{g}$. Deshalb ist $\varphi(\mathfrak{g}^{reg}) \subset \mathfrak{g}^{reg}$ für alle $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$. $\square$

Beispiel 2.5.6. *Sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(k)$, $\mathrm{char}(k) \neq 2$ und*

$$x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$$

ein Element in $\mathfrak{g}$. Dann ist das charakteristische Polynom von x durch

$$P_x(t) = \det \begin{pmatrix} t-2a & 0 & 2b \\ 0 & t+2a & -2c \\ c & -b & t \end{pmatrix} = t^3 + 4t\det(x)$$

gegeben.

Also ist $a_1(x) = 4\det(x)$ für alle $x \in \mathfrak{g}$ und $a_0 = 0$. Daher ist $\mathrm{rank}\,\mathfrak{g} = 1$ und x genau dann regulär, wenn $\det(x) \neq 0$ ist. Wegen $\mathrm{tr}(x) = 0$ ist $x \in \mathfrak{g}$ regulär ist genau dann, wenn x nicht nilpotent ist. Es gilt also

$$\mathfrak{sl}_2(k)^{reg} = \mathfrak{sl}_2(k) \setminus \mathcal{N},$$

wobei $\mathcal{N}$ den Kegel der nilpotenten Matrizen in $\mathfrak{sl}_2(k)$ bezeichnet.

Lemma 2.5.7. *Sei $h_0 \in \mathfrak{g}^{reg}$. Dann ist die Lie Algebra $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0(h_0)$ nilpotent.*

Beweis. Es seien $\lambda_0 = 0, \lambda_1, \dots, \lambda_p$ die verschiedenen Eigenwerte von $\mathrm{ad}(h_0)$ und

$$\mathfrak{g}_1 = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathfrak{g}_{\lambda_i}(h_0)$$

die Summe der $\mathfrak{g}_{\lambda_i}(h_0)$ ohne $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0(h_0)$. Dann ist $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}_1] \subset \mathfrak{g}_1$ wegen Lemma 2.5.1. Also induziert die adjungierte Darstellung von $\mathfrak{g}$ eingeschränkt auf $\mathfrak{h}$ eine Darstellung $\rho\colon \mathfrak{h} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}_1)$. Man betrachte die polynomiale Funktion

$$h \mapsto d(h) = \det(\rho(h))$$

auf $\mathfrak{h}$. Mit $q_i = \dim \mathfrak{g}_{\lambda_i}(h_0)$ gilt

$$d(h_0) = \lambda_1^{q_1}\lambda_2^{q_2}\cdots\lambda_p^{q_p} \neq 0$$

Also ist d ungleich der Nullfunktion und es gibt eine Zariski-offene Menge in $\mathfrak{h}$ auf der d nicht verschwindet. Sei $h \in \mathfrak{h}$ ein Element mit $d(h) \neq 0$. Die Eigenwerte von $\rho(h)$ sind alle ungleich Null. Also folgt $\mathfrak{g}_0(h) \subset \mathfrak{h}$. Da h_0 regulär ist, gilt $\dim \mathfrak{h} = \mathrm{rank}\,\mathfrak{g}$ und $\dim \mathfrak{g}_0(h) \geq \mathrm{rank}\,\mathfrak{g}$. Das bedeutet aber

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0(h).$$

Also ist, nach Definition von $\mathfrak{g}_0(h)$ die lineare Abbildung $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}(h)$ nilpotent, d.h., $(\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}(h))^q = 0$ für alle $q \geq \mathrm{rank}\,\mathfrak{g}$. Die Matrixeinträge von $(\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}(h))^q$ sind aber polynomiale Funktionen auf $\mathfrak{h}$. Wegen Zariski-Stetigkeit gilt also $(\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}(h))^q = 0$ für *alle* $h \in \mathfrak{h}$. Damit sind alle $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}(h)$ nilpotent, und $\mathfrak{h}$ somit nach dem Satz von Engel nilpotent. $\square$

Lemma 2.5.8. *Sei $h_0 \in \mathfrak{g}^{reg}$. Dann ist die Lie Algebra $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0(h_0)$ gleich ihrem Normalisator in $\mathfrak{g}$, also $\mathfrak{h} = N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$.*

Beweis. Sei $x \in N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$. Dann ist $[h_0, x] \in \mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0(h_0)$. Also gibt es ein $p \geq 0$ mit

$$\mathrm{ad}(h_0)^p([h_0, x]) = \mathrm{ad}(h_0)^{p+1}(x) = 0.$$

Das bedeutet aber $x \in \mathfrak{h}$. Deshalb folgt $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. $\square$

Es ist zweckmäßig, nilpotente selbt-normalisierende Lie Algebren wie unser $\mathfrak{h}$ genauer zu studieren.

Definition 2.5.9. Eine Lie Unteralgebra $\mathfrak{h}$ von $\mathfrak{g}$ heißt *Cartan-Unteralgebra* in $\mathfrak{g}$, falls $\mathfrak{h}$ nilpotent ist und $\mathfrak{h} = N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ gilt.

Es ist a priori nicht klar, ob in $\mathfrak{g}$ eine Cartan-Unteralgebra existiert. Man kann folgendes Resultat zeigen:

Satz 2.5.10. *Sei $\mathfrak{g}$ eine endlich-dimensionale Lie Algebra über einem unendlichen Körper k. Dann hat $\mathfrak{g}$ eine Cartan-Unteralgebra. Ist $\operatorname{char}(k) = 0$, so haben alle Cartan-Unteralgebren die gleiche Dimension, nämlich $\operatorname{rank} \mathfrak{g}$.*

Ist k algebraisch abgeschlossen, dann ist $\mathfrak{g}_0(h)$ für jedes $h \in \mathfrak{g}^{reg}$ bereits eine Cartan-Unteralgebra, wie wir in 2.5.7 und 2.5.8 gezeigt haben. Ist k nicht algebraisch abgeschlossen und hat Charakteristik Null, so sei K ein algebraischer Abschluß von k und $\mathfrak{g}_K = K \otimes_k \mathfrak{g}$. Sei $\mathfrak{h}$ eine Lie Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}_K$ die Lie Unteralgebra von $\mathfrak{g}_K$, die von $\mathfrak{h}$ über K aufgespannt wird. Dann ist $\mathfrak{h}$ genau dann eine Cartan-Unteralgebra in $\mathfrak{g}$, wenn $\mathfrak{h}_K$ eine Cartan-Unteralgebra in $\mathfrak{g}_K$ ist. Damit zeigt man, daß in Charakteristik Null immer eine Cartan-Unteralgebra exsitiert, denn es existieren Cartan-Unteralgebren von $\mathfrak{g}_K$, die über k definiert sind.
Die Existenz von Cartan-Unteralgebren in Lie Algebren über endlichen Körpern wird in [**30**] untersucht.

Beispiel 2.5.11. *In $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_2(k)$ bilden die Diagonalmatrizen eine Cartan-Unteralgebra. Ebenso bilden die Matrizen der Form*

$$x = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

eine Cartan-Unteralgebra in $\mathfrak{g}$.

Das Beispiel zeigt auch, daß Cartan-Unteralgebren nicht eindeutig sein müssen. Immerhin gilt folgender Satz.

Satz 2.5.12. *Sei $\mathfrak{g}$ eine endlich-dimensionale Lie Algebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik Null. Dann sind alle Cartan-Unteralgebren unter der Gruppe $\operatorname{Aut}_s(\mathfrak{g})$ zueinander konjugiert.*

Für $k = \mathbb{R}$ sind die beiden Cartan-Unteralgebren in $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_2(\mathbb{R})$ aus obigem Beispiel übrigens nicht konjugiert.

Satz 2.5.13. *Sei $\mathfrak{h}$ eine Cartan-Unteralgebra in $\mathfrak{g}$. Dann ist $\mathfrak{h}$ eine maximal nilpotente Lie Unteralgebra von $\mathfrak{g}$.*

Beweis. Sei $\mathfrak{n}$ eine nilpotente Lie Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ mit $\mathfrak{n} \supset \mathfrak{h}$. Angenommen, $\mathfrak{n} \neq \mathfrak{h}$. Dann definiert die adjungierte Darstellung von $\mathfrak{n}$, eingeschränkt auf $\mathfrak{h}$ eine Darstellung $\sigma \colon \mathfrak{h} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{n}/\mathfrak{h})$. Das ist eine Darstellung durch nilpotente Operatoren nach dem Satz von Engel. Wegen Lemma 1.6.13 gibt es ein $v \in \mathfrak{n}/\mathfrak{h}$ mit $v \neq 0$ und $\sigma(x)v = 0$ für alle $x \in \mathfrak{h}$. Sei $y \in \mathfrak{n}$ ein Repräsentant der Nebenklasse v. Dann gilt $[x, y] = \operatorname{ad}(x)(y) \in \mathfrak{h}$ für alle $x \in \mathfrak{h}$. Also ist $y \in N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$, weil $\mathfrak{h}$ eine Cartan-Unteralgebra in $\mathfrak{g}$ ist. Dann ist die Restklasse aber Null in $\mathfrak{n}/\mathfrak{h}$, d.h., $v = 0$, Widerspruch. Also ist doch $\mathfrak{n} = \mathfrak{h}$. □

Korollar 2.5.14. *Ist $\mathfrak{g}$ nilpotent, so ist $\mathfrak{g}$ selbst die einzige Cartan-Unteralgebra in $\mathfrak{g}$.*

Die Umkehrung von Satz 2.5.13 ist i.a. nicht wahr. Es gibt maximal nilpotente Unteralgebren in manchen Lie Algebren, die keine Cartan-Unteralgebren sind.

Beispiel 2.5.15. *Sei* $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(k)$, $\mathrm{char}(k) = 0$ *und* (x, y, h) *die Standardbasis von* $\mathfrak{g}$. *Dann ist die Unteralgebra* $\mathfrak{a} = k \cdot x$ *maximal nilpotent, aber keine Cartan-Unteralgebra in* $\mathfrak{g}$.

Angenommen, $\mathfrak{n}$ ist eine nilpotente Unteralgebra von $\mathfrak{g}$, die x enthält. Dann ist $\dim \mathfrak{n} \leq 2$. Deswegen muß $\mathfrak{n}$ abelsch sein. Sei $g = \alpha x + \beta y + \gamma h \in \mathfrak{n}$. Dann gilt

$$0 = [x, g] = \beta h - 2\gamma x.$$

Somit ist $\beta = \gamma = 0$ und deshalb $\mathfrak{n} = k \cdot g = k \cdot x = \mathfrak{a}$. Somit ist $\mathfrak{a}$ maximal nilpotent. Auf der anderen Seite ist $\mathfrak{n}$ nicht selbst-normaliserend, da alle oberen Dreiecksmatrizen in $\mathfrak{g}$ die Algebra $\mathfrak{n}$ normalisieren.

Wir wollen jetzt die Diskussion von Cartan-Algebren auf halbeinfache Lie Algebren über einem Körper der Charakteristik Null spezialisieren. Wir formulieren dazu ein Lemma, das man im Zuge von Satz 2.5.12 beweist.

Lemma 2.5.16. *Sei* $\mathfrak{g}$ *eine Lie Algebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper. Sei* $\mathfrak{h}$ *eine Cartan-Unteralgebra in* $\mathfrak{g}$. *Dann gilt es ein* $h \in \mathfrak{g}^{reg} \subset \mathfrak{g}$ *mit* $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0(h)$.

Satz 2.5.17. *Sei* $\mathfrak{g}$ *eine halbeinfache Lie Algebra und* $\mathfrak{h}$ *eine Cartan-Unteralgebra in* $\mathfrak{g}$. *Dann ist* $\mathfrak{h}$ *abelsch.*

Beweis. Wir dürfen annehmen, daß k algebraisch abgeschlossen ist. Dann gibt es wegen Lemma 2.5.16 ein $h_0 \in \mathfrak{h}$ mit $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0(h_0)$. Sei $\lambda \neq 0$ und $x \in \mathfrak{g}_\lambda(h_0)$. Für $h \in \mathfrak{h}$ und $\mu \in k$ gilt

$$\mathrm{ad}(x)\,\mathrm{ad}(h)(\mathfrak{g}_\mu(h_0)) \subset \mathrm{ad}(x)(\mathfrak{g}_\mu(h_0)) \subset \mathfrak{g}_{\lambda+\mu}(h_0).$$

Es seien $\lambda_0 = 0, \lambda_1, \ldots, \lambda_p$ die verschiedenen Eigenwerte von $\mathrm{ad}(h_0)$. Wenn wir eine Basis von $\mathfrak{g}$ entsprechend der Zerlegung

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=0}^{p} \mathfrak{g}_{\lambda_i}(h_0)$$

wählen, so hat die zugehörige Blockmatrix von $\mathrm{ad}(x)\,\mathrm{ad}(h)$ Nullblöcke auf der Diagonalen. Damit gilt für die Killingform $\kappa(x, h) = 0$. Also ist $\mathfrak{h}$ orthogonal zu allen $\mathfrak{g}_{\lambda_i}(h_0)$ für $1 \leq i \leq p$ bezüglich der Killingform. Da $\mathfrak{h}$ nilpotent und damit auflösbar ist, folgt $\kappa(\mathfrak{h}, [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]) = 0$ nach dem Cartan-Kriterium. Damit folgt aber nun $\kappa(\mathfrak{g}, [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]) = 0$. Da die Killingform auf $\mathfrak{g}$ nichtausgeartet ist, da $\mathfrak{g}$ halbeinfach ist, folgt $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = 0$. Deshalb ist $\mathfrak{h}$ abelsch. □

Da Cartan-Unteralgebren maximal nilpotent sind, gilt folgendes Korollar.

Korollar 2.5.18. *Sei* $\mathfrak{g}$ *eine halbeinfache Lie Algebra. Dann sind Cartan-Unteralgebren in* $\mathfrak{g}$ *maximal abelsche Unteralgebren.*

Lemma 2.5.19. *Sei* $\mathfrak{g}$ *eine halbeinfache Lie Algebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper* k. *Sei* $\mathfrak{h}$ *eine Cartan-Unteralgebra in* $\mathfrak{g}$. *Dann sind alle* $h \in \mathfrak{h}$ *halbeinfach.*

Beweis. Sei $h \in \mathfrak{h}$ und $h = s + n$ seine Jordan-Zerlegung, siehe Satz 2.1.13. Da $\mathfrak{h}$ abelsch ist, gilt $\mathrm{ad}(h)(\mathfrak{h}) = 0$. Da $\mathrm{ad}(s)$ und $\mathrm{ad}(n)$ die halbeinfachen bzw. nilpotenten Anteile von $\mathrm{ad}(h)$ sind, kann man sie als Polynome ohne konstanten Term in $\mathrm{ad}(h)$ darstellen. Insbesondere gilt

$$\mathrm{ad}(s)(\mathfrak{h}) = \mathrm{ad}(n)(\mathfrak{h}) = 0.$$

Da $\mathfrak{h}$ maximal abelsch ist, folgt $s, n \in \mathfrak{h}$. Wegen Lemma 2.5.16 ist $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0(h_0)$. Wie im Beweis von Satz 2.5.17 sehen wir, daß $\mathfrak{h}$ orthogonal zu $\mathfrak{g}_\lambda(h_0)$ ist für Eigenwerte $\lambda \neq 0$ von $\mathrm{ad}(h_0)$. Sei $y \in \mathfrak{h}$. Wegen $[\mathrm{ad}(y), \mathrm{ad}(n)] = \mathrm{ad}([y, n]) = 0$ ist mit $\mathrm{ad}(y)$ und $\mathrm{ad}(n)$ auch $\mathrm{ad}(y)\,\mathrm{ad}(n)$ eine nilpotente lineare Abbildung. Deshalb ist $\kappa(y, n) = 0$ und somit n orthogonal zu $\mathfrak{g}$. Da die Killingform von $\mathfrak{g}$ nicht-ausgeartet ist, folgt $n = 0$ und $h = s$ ist halbeinfach. □

KOROLLAR 2.5.20. *Sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Lie Algebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper. Dann sind alle regulären Elemente in $\mathfrak{g}$ halbeinfach.*

BEWEIS. Sei $h \in \mathfrak{g}^{reg}$. Dann ist $\mathfrak{g}_0(h)$ wegen 2.5.7 und 2.5.8 eine Cartan-Unteralgebra in $\mathfrak{g}$. Wegen 2.5.19 ist h halbeinfach. □

2.6. Die Wurzelraumzerlegung

Sei $\mathfrak{g}$ eine endlich-dimensionale Lie Algebra über einem Körper der Charakteristik Null und $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$. Für jede Funktion $\alpha\colon \mathfrak{h} \to k$ sei

$$\mathfrak{g}_\alpha = \bigcap_{h \in \mathfrak{h}} \mathfrak{g}_{\alpha(h)}(h)$$

der Durchschnitt der verallgemeinerten Eigenräume für alle $h \in \mathfrak{h}$. Wir nennen α ein *Gewicht*, falls $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$ ist.

Satz 2.6.1. *Sei k algebraisch abgeschlossen und $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine nilpotente Unteralgebra. Dann gilt:*

$$\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_0, \tag{2.2}$$

$$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}, \tag{2.3}$$

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}_\alpha] \subset \mathfrak{g}_\alpha, \tag{2.4}$$

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha\colon \mathfrak{h} \to k} \mathfrak{g}_\alpha \tag{2.5}$$

Für $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$ folgt $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ und $\alpha([\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]) = 0$. Für h, h' gilt die folgende Formel für die Killingform:

$$\kappa(h, h') = \sum_{\alpha \in \mathfrak{h}^*} \dim \mathfrak{g}_\alpha \cdot \alpha(h)\alpha(h').$$

Beweis. Da $\mathfrak{h}$ nilpotent ist gilt $(\mathrm{ad}(h))^n x = 0$ für alle $x, h \in \mathfrak{h}$ für genügend großes n. Folglich ist $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_0$. Die nächsten beiden Aussagen folgen dann mit Lemma 2.5.1, übrigens auch ohne die Bedingung, daß k algebraisch abgeschlossen ist. Die Summe in (2.5) ist direkt. Man muß aber noch zeigen, daß die Summe der simultanen verallgemeinerten Eigenräume ganz $\mathfrak{g}$ ausschöpft. Das folgt aber mit den zuvor gezeigten Eigenschaften und $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}_{\alpha(h)}(h)] \subset \mathfrak{g}_{\alpha(h)}(h)$ und $\dim \mathfrak{g} < \infty$ (Übung).
Ist nun k algebraisch abgeschlossen, so wenden wir den Satz von Lie an. Für alle $\alpha\colon \mathfrak{h} \to k$ gibt also es eine Basis von $\mathfrak{g}_\alpha$, bezüglich welcher alle Endomorphismen $\mathrm{ad}(h)\mid_{\mathfrak{g}_\alpha}$ durch obere Dreiecksmatrizen in $\mathfrak{gl}_m(k)$, $m = \dim \mathfrak{g}_\alpha$ mit Diagonalelementen alle gleich $\alpha(h)$ dargestellt werden. Daraus folgt sofort die angegebene Formel für die Killingform. Betrachtet man $\mathrm{ad}([h, h'])$, so hat diese obere Dreiecksmatrix $\alpha([h, h'])$ auf der Diagonalen. Gleichzeitig ist das identisch mit $[\mathrm{ad}(h), \mathrm{ad}(h')]$, welches Null auf der Diagonalen hat. Es folgt, für $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$, dann $\alpha([h, h']) = 0 = [\alpha(h), \alpha(h')]$, also $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ und $\alpha([\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]) = 0$. □

Sei nun $\mathfrak{g}$ für den Rest dieses Abschnittes eine **halbeinfache, komplexe Lie Algebra** und $\mathfrak{h}$ eine Cartan-Unteralgebra von $\mathfrak{g}$. Dann sind alle Elemente $h \in \mathfrak{h}$ ad-halbeinfach, siehe Lemma 2.5.19 und $\mathfrak{h}$ ist abelsch. Also können wir die Endomorphismen $\mathrm{ad}(h)$ auf $\mathfrak{g}_\alpha$ alle durch Diagonalmatrizen $\mathrm{diag}(\alpha(h), \ldots, \alpha(h))$ darstellen. Es gilt also

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g} \mid [h, x] = \alpha(h)x \ \ \forall h \in \mathfrak{h}\}.$$

Definition 2.6.2. Das *Wurzelsystem* von $\mathfrak{g}$ bezüglich $\mathfrak{h}$ ist definiert durch

$$\Phi = \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \{\alpha \in \mathfrak{h}^* \mid \alpha \neq 0, \mathfrak{g}_\alpha \neq 0\}.$$

Die Elemente von Φ heißen *Wurzeln*. Für $\alpha \in \Phi$ heißt $\mathfrak{g}_\alpha$ der *Wurzelraum* zur Wurzel α.

Die Lie Algebra $\mathfrak{g}$ zerfällt in die direkte Summe

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Phi} \mathfrak{g}_\alpha. \tag{2.6}$$

Diese Zerlegung heißt *Wurzelraumzerlegung*, oder *Cartan-Zerlegung* von $\mathfrak{g}$ bezüglich $\mathfrak{h}$. Dabei ist $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0 = Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ der Gewichtsraum zum Gewicht Null.

Satz 2.6.3. *Es sei $\mathfrak{h}$ eine Cartan-Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ und (2.6) die zugehörige Cartan-Zerlegung. Dann gilt:*

(1) *Sind $\alpha, \beta \in \Phi \cup \{0\}$ mit $\alpha + \beta \neq 0$ gegeben, so folgt $\kappa(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta) = 0$, also $\mathfrak{g}_\alpha \perp \mathfrak{g}_\beta$.*
(2) *Aus $\alpha \in \Phi$ folgt $\mathfrak{g}_\alpha \perp \mathfrak{h}$.*
(3) *Die Restriktion von κ auf $\mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_{-\alpha}$ und insbesondere auf $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$ ist nicht ausgeartet.*
(4) *Aus $\alpha \in \Phi$ folgt $-\alpha \in \Phi$.*
(5) $\operatorname{span} \Phi = \mathfrak{h}^*$.

Beweis. Zu (1): Für $x \in \mathfrak{g}_\alpha$ und $y \in \mathfrak{g}_\beta$ gilt nach Satz 2.6.1

$$(\operatorname{ad}(x) \operatorname{ad}(y))^n(\mathfrak{g}_\gamma) \subset \mathfrak{g}_{n(\alpha+\beta)+\gamma} = 0$$

für alle $\gamma \in \Phi \cup \{0\}$, falls n genügend groß ist und $\alpha + \beta \neq 0$. Daher ist der Endomorphismus $\operatorname{ad}(x) \operatorname{ad}(y) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ nilpotent, so daß gilt $\kappa(x, y) = 0$.

Zu (2): Das folgt aus (1) mit $\beta = 0$.

Zu (3): Es sei $z \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ gegeben mit $\kappa(z, \mathfrak{g}_\alpha) = 0$. Wir müssen $z = 0$ zeigen. Wegen (1) gilt $\kappa(\mathfrak{g}_{-\alpha}, \mathfrak{g}_\beta) = 0$ für alle $\beta \neq \alpha$. Zusammen gilt also $\kappa(z, \mathfrak{g}_\beta) = 0$ für alle β, und somit $\kappa(z, \mathfrak{g}) = 0$ nach (2.6). Weil κ auf $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ nicht-ausgeartet ist, folgt $z = 0$.

Zu (4): Sei $\alpha \in \Phi$. Angenommen, $-\alpha \notin \Phi$, also $\mathfrak{g}_{-\alpha} = 0$. Dann ist $\kappa(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta) = 0$ für alle β und somit wieder $\kappa(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}) = 0$. Also folgt $\mathfrak{g}_\alpha = 0$, im Widerspruch zu $\alpha \in \Phi$.

Zu (5): Wenn Φ nicht $\mathfrak{h}^*$ erzeugt, dann gibt es wegen Dualität ein $h \in \mathfrak{h}$, $h \neq 0$ mit $\alpha(h) = 0$ für alle $\alpha \in \Phi$. Das bedeutet $[h, \mathfrak{g}_\alpha] = 0$ für alle $\alpha \in \Phi$. Wegen $[h, \mathfrak{g}_0] = 0$ folgt $[h, \mathfrak{g}] = 0$, also $h \in Z(\mathfrak{g}) = 0$, Widerspruch. □

Lemma 2.6.4. *Seien $\alpha \in \Phi$, $x \in \mathfrak{g}_\alpha$, $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ und $h \in \mathfrak{h}$. Dann ist $[x, y] \in \mathfrak{h}$ und es gilt*

$$\kappa(h, [x, y]) = \alpha(h)\kappa(x, y). \tag{2.7}$$

Insbesondere ist $\dim [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \geq 1$.

Beweis. Es gilt $[x, y] \in \mathfrak{g}_{\alpha-\alpha} = \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$ wegen (2.3). Weiterhin ist

$$\kappa(h, [x, y]) = \kappa([h, x], y) = \kappa(\alpha(h)x, y) = \alpha(h)\kappa(x, y).$$

Weil κ auf $\mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_{-\alpha}$ nicht-ausgeartet ist, gibt es ein $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ und ein $x_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ mit $\kappa(x_\alpha, x_{-\alpha}) \neq 0$. Wegen $\alpha \neq 0$ gibt es ein $h \in \mathfrak{h}$ mit $\alpha(h) \neq 0$, also auch $\kappa(h, [x_\alpha, x_{-\alpha}]) \neq 0$ wegen (2.7). Damit ist $[x_\alpha, x_{-\alpha}]$ ein von Null verschiedenes Element aus $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$. □

Lemma 2.6.5. *Seien $\alpha \in \Phi$, $x \in \mathfrak{g}_\alpha$, $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ mit $[x, y] \neq 0$. Dann folgt $\alpha([x, y]) \neq 0$.*

Beweis. Es sei $h = [x, y]$. Angenommen, $\alpha(h) = 0$. Dann ist auch $[h, x] = \alpha(h)x = 0$ und $[h, y] = -\alpha(h)y = 0$. Deshalb würden x, y, h eine nilpotente Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ erzeugen. Nach dem Satz von Lie könnte man also $\operatorname{ad}(x), \operatorname{ad}(y)$ und $\operatorname{ad}(h)$ bezüglich einer Basis von $\mathfrak{g}$ durch obere Dreiecksmatrizen darstellen. Dann wäre $\operatorname{ad}(h) = [\operatorname{ad}(x), \operatorname{ad}(y)]$ aber nilpotent, im Widerspruch zu $h \neq 0$ und der Tatsache, daß $\operatorname{ad}(h)$ halbeinfach ist. □

Lemma 2.6.6. *Für jede Wurzel* $\alpha \in \Phi$ *gilt* $\dim [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] = 1$ *und* α *verschwindet nicht auf der Geraden* $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subset \mathfrak{h}$.

Beweis. Wir wissen schon $\dim [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \geq 1$ nach Lemma 2.6.4. Wegen Lemma 2.6.5 ist $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \cap \ker(\alpha) = 0$. Das bedeutet

$$\begin{aligned}\dim [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] &= \dim([\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] + \ker(\alpha)) + \dim([\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \cap \ker(\alpha)) - \dim \ker(\alpha) \\ &\leq \dim \mathfrak{h} + 0 - (\dim \mathfrak{h} - 1) \\ &= 1.\end{aligned}$$

□

Da die Killingform von $\mathfrak{g}$ auf $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$ nicht-ausgeartet ist, können wir damit $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{h}^*$ identifizieren: wir haben einen Isomorphismus

$$\mathfrak{h}^* \to \mathfrak{h},\ \alpha \mapsto t_\alpha,$$

der durch die Bedingung

$$\kappa(h, t_\alpha) = \alpha(h) \quad \text{für alle } h \in \mathfrak{h} \tag{2.8}$$

charakterisiert ist. Damit entspricht Φ der Teilmenge $\{t_\alpha \mid \alpha \in \Phi\} \subset \mathfrak{h}$.

Definition 2.6.7. Für $\alpha \in \Phi$ sei das Element $t_\alpha \in \mathfrak{h}$ definiert durch (2.8).

Lemma 2.6.8. *Ist* $\alpha \in \Phi$ *eine Wurzel und* $x \in \mathfrak{g}_\alpha$, $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ *Elemente mit* $\kappa(x, y) = 1$, *so gilt* $[x, y] = t_\alpha$.

Beweis. Nach (2.7) ist $\kappa(h, [x, y]) = \alpha(h)$ für alle $h \in \mathfrak{h}$. Mit (2.8) folgt $[x, y] = t_\alpha$. □

Lemma 2.6.9. *Für jede Wurzel* $\alpha \in \Phi$ *gilt* $\kappa(t_\alpha, t_\alpha) \neq 0$.

Beweis. Wir schreiben $t_\alpha = [x, y]$ mit $x \in \mathfrak{g}_\alpha$, $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ und $\kappa(x, y) = 1$ wie oben. Dann ist

$$\kappa(t_\alpha, t_\alpha) = \alpha(t_\alpha) = \alpha([x, y]) \neq 0$$

wegen Lemma 2.6.5. □

Definition 2.6.10. Zu jeder Wurzel $\alpha \in \Phi$ sei die *Kowurzel*, oder duale Wurzel $\alpha^\vee$ definiert als

$$h_\alpha = \alpha^\vee = \frac{2}{\kappa(t_\alpha, t_\alpha)} t_\alpha \in \mathfrak{h}.$$

Es gilt

$$\alpha(h_\alpha) = \frac{2\alpha(t_\alpha)}{\kappa(t_\alpha, t_\alpha)} = 2.$$

Wir sehen auch $(-\alpha)^\vee = -\alpha^\vee$.

Es stellt sich nun heraus, daß alle Wurzelräume $\mathfrak{g}_\alpha$ eindimensional sind, und daß außer $\pm\alpha$ kein Vielfaches einer Wurzel α wieder eine Wurzel ist, also

$$\mathbb{Z}\alpha \cap \Phi = \{\alpha, -\alpha\}$$

für alle $\alpha \in \Phi$ gilt.

Satz 2.6.11. *Für jede Wurzel* $\alpha \in \Phi$ *gilt* $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$ *und* $\dim \mathfrak{g}_{n\alpha} = 0$ *für alle* $n \in \mathbb{Z} \setminus \{\pm 1\}$. *Für jedes* $\alpha \in \Phi$ *gibt es einen injektiven Lie Algebra Homomorphismus* $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \hookrightarrow \mathfrak{g}$ *mit*

$$\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \cong \mathfrak{g}_\alpha, \quad \mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \cong \mathfrak{g}_{-\alpha}, \quad \mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \cong [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}].$$

Beweis. Wir wählen $x_{\pm\alpha} \in \mathfrak{g}_{\pm\alpha}$ mit $[x_\alpha, x_{-\alpha}] = h_\alpha$. Wegen $\alpha(h_\alpha) = 2$ ist dann $[h_\alpha, x_\alpha] = 2x_\alpha$ und $[h_\alpha, x_{-\alpha}] = -2x_{-\alpha}$. Damit ist

$$\mathfrak{s}_\alpha = \mathbb{C}x_\alpha \oplus \mathbb{C}x_{-\alpha} \oplus \mathbb{C}h_\alpha$$

eine 3-dimensionale Unteralgebra von $\mathfrak{g}$, die isomorph zu $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ ist. Der Isomorphismus ist durch $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \to x_\alpha$, $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \to x_{-\alpha}$ und $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \to h_\alpha$ gegeben. Die Unteralgebra $\mathfrak{s}_\alpha$ ist wohldefiniert, sobald wir wissen daß $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$ für alle $\alpha \in \Phi$ gilt. Dann folgt auch $\mathfrak{g}_{\pm\alpha} = \langle x_{\pm\alpha} \rangle$ und $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] = \langle h_\alpha \rangle$. Dazu betrachten wir nun den Unterraum

$$\mathfrak{s} = \mathbb{C}x_{-\alpha} \oplus \mathbb{C}h_\alpha \oplus \bigoplus_{n \geq 1} \mathfrak{g}_{n\alpha},$$

der von $\operatorname{ad}(x_\alpha)$ und $\operatorname{ad}(x_{-\alpha})$ invariant gelassen wird. Dann folgt, mit $\operatorname{ad} = \operatorname{ad}_{\mathfrak{s}}$ und $\alpha(h_\alpha) = 2$

$$\begin{aligned}
0 &= \operatorname{tr}([\operatorname{ad}(x_\alpha), \operatorname{ad}(x_{-\alpha})]) \\
&= \operatorname{tr}(\operatorname{ad}([x_\alpha, x_{-\alpha}])) \\
&= \operatorname{tr}(\operatorname{ad}(h_\alpha)) \\
&= -\alpha(h_\alpha) + 0 + \sum_{n \geq 1} n \cdot \dim \mathfrak{g}_{n\alpha} \cdot \alpha(h_\alpha) \\
&= 2(-1 + \dim \mathfrak{g}_\alpha + \sum_{n \geq 2} n \cdot \dim \mathfrak{g}_{n\alpha}).
\end{aligned}$$

Wir erhalten die diophantische Gleichung

$$1 = \dim \mathfrak{g}_\alpha + \sum_{n \geq 2} n \cdot \dim \mathfrak{g}_{n\alpha}.$$

Auf der rechten Seite sind alle Summanden nicht-negative ganze Zahlen. Angenommen, $\dim \mathfrak{g}_{n\alpha} > 0$ für ein $n \geq 2$. Dann wäre die Summe rechts aber schon mindestens gleich 2, im Widerspruch zur linken Seite. Also folgt $\dim \mathfrak{g}_{n\alpha} = 0$ für alle $n \geq 2$ und $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$. Wir können dieses Argument auch für $-\alpha$ durchführen. Also gilt auch $\dim \mathfrak{g}_{-\alpha} = 1$ und $\dim \mathfrak{g}_{-n\alpha} = 0$ für alle $n \geq 2$. □

Korollar 2.6.12. *Für $h, h' \in \mathfrak{h}$ gilt*

$$\kappa(h, h') = \sum_{\alpha \in \Phi} \alpha(h)\alpha(h').$$

Weiterhin hat man

$$\dim \mathfrak{g} = \operatorname{rank} \mathfrak{g} + |\Phi|$$

Beweis. Die Formel für die Killingform folgt aus Satz 2.6.1 und $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$ für $\alpha \in \Phi$. Damit und mit der Cartan-Zerlegung (2.6) folgt die zweite Behauptung. □

Wir führen noch eine Schreibweise ein. Seien $\alpha, \beta \in \Phi$. Dann sei

$$\langle \beta, \alpha^\vee \rangle = \beta(h_\alpha).$$

Es ist $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = \alpha(\alpha^\vee) = \alpha(h_\alpha) = 2$.

Lemma 2.6.13. *Es seien $\alpha, \beta \in \Phi$. Dann gilt*

(1) $\langle \beta, \alpha^\vee \rangle = \beta(h_\alpha) \in \mathbb{Z}$.
(2) $\kappa(h_\alpha, h_\beta) \in \mathbb{Z}$.
(3) $\beta - \langle \beta, \alpha^\vee \rangle \alpha \in \Phi$.

Beweis. Zu (1): Für $\beta = \pm\alpha$ ist $\beta(h_\alpha) = \pm 2 \in \mathbb{Z}$. Sei also $\beta \neq \pm\alpha$ und

$$\mathfrak{s} := \bigoplus_j \mathfrak{g}_{\beta + j\alpha}$$

Jeder Summand, der von Null verschieden ist, ist 1-dimensional und $\mathfrak{s}$ ist ein $\mathfrak{s}_\alpha$-Modul, also ein $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-Modul. Nach Voraussetzung und Satz 2.6.11 kann β kein ganzzahliges Vielfaches von α sein, es ist also $\beta + k\alpha \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ und

$$(\beta + k\alpha)(h_\alpha) = \beta(h_\alpha) + 2k.$$

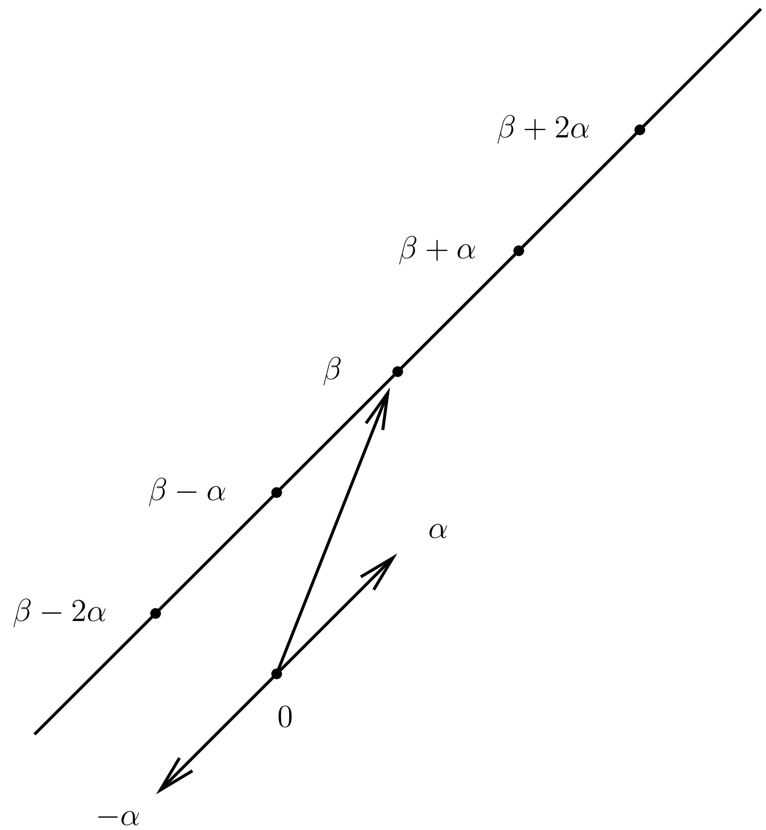
Somit unterscheiden sich alle Gewichte um ein Vielfaches von 2, und $\mathfrak{s}$ ist daher ein *einfacher* $\mathfrak{s}_\alpha$-Modul. Diese haben wir aber schon klassifiziert und gesehen, daß h_α dann mit ganzzahligen Eigenwerten operiert. Genauer gilt: sei $q \geq 0$ die maximale ganze Zahl mit $\beta + q\alpha \in \Phi$ und $r \geq 0$ die maximale ganze Zahl mit $\beta - r\alpha \in \Phi$. Dann liegt der ganze *String*

$$\beta - r\alpha,\ \beta - (r-1)\alpha,\ \dots, \beta + q\alpha$$

in Φ und es gilt $\beta(h_\alpha) - 2r = -(\beta(h_\alpha) + 2q)$, oder anders gesagt

$$\beta(h_\alpha) = r - q \in \mathbb{Z}.$$

Die Zahlen $\beta(h_\alpha)$ heißen *Cartan-Zahlen*.



Zu (2): Das folgt mit der Formel für die Killingform aus Korollar 2.6.12.
Zu (3): In dem Wurzel-String $\beta - r\alpha, \dots, \beta + q\alpha$ liegt insbesondere auch die Wurzel

$$\beta - (r - q)\alpha = \beta - \langle \beta, \alpha^\vee \rangle \alpha.$$

□

Definition 2.6.14. Mit Hilfe der Killingform sei eine Bilinearform auf $\mathfrak{h}^*$ definiert durch

$$(\lambda, \mu) := \kappa(t_\lambda, t_\mu)$$

für $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$.

Damit ist

$$\begin{aligned}\beta(h_\alpha) &= \langle \beta, \alpha^\vee \rangle \\ &= \kappa(t_\beta, h_\alpha) \\ &= 2\frac{\kappa(t_\beta, t_\alpha)}{\kappa(t_\alpha, t_\alpha)} \\ &= \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \\ &= r - q \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Die Wurzeln $\alpha \in \Phi$ erzeugen $\mathfrak{h}^*$, sind aber nicht linear unabhängig. Man wähle also eine Basis $(\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell)$ von $\mathfrak{h}^*$. Jede Wurzel $\beta \in \Phi$ kann man dann eindeutig als Linearkombination der Basiselemente schreiben, sogar mit rationalen Koeffizienten (Übung). Bezeichnet $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{Q}}$ den von den Wurzeln über $\mathbb{Q}$ aufgespannten Teilraum von $\mathfrak{h}^*$, so gilt $\dim_{\mathbb{Q}} \mathfrak{h}^*_{\mathbb{Q}} = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h}^*$. Sei $E = \mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$ der *reelle* Vektorraum, der durch die $\alpha \in \Phi$ erzeugt wird.

Satz 2.6.15. *Die Einschränkung der Bilinearform* (λ, μ) *auf* E *ist ein positiv definites Skalarprodukt. Damit ist* E *ein Euklidischer Raum.*

Beweis. Für $\lambda \in E$ ist $\alpha(t_\lambda) \in \mathbb{R}$ und somit

$$(\lambda, \lambda) = \kappa(t_\lambda, t_\lambda) = \sum_{\alpha \in \Phi} \alpha(t_\lambda)^2 \geq 0$$

nach Korollar 2.6.12. Gilt $(\lambda, \lambda) = 0$, so folgt $\alpha(t_\lambda) = 0$ für alle $\alpha \in \Phi$ und somit $t_\lambda = 0$, und $\lambda = 0$. Für $\lambda \neq 0$ ist $(\lambda, \lambda) > 0$, also ist das Skalarprodukt positiv definit. ☐

Anstatt E in $\mathfrak{h}^*$ zu betrachten, kann man natürlich auch $E^* = \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ in $\mathfrak{h}$ betrachten. Das ist der reelle Unterraum der Cartan-Unteralgebra $\mathfrak{h}$ von $\mathfrak{g}$, der von den Kowurzeln $\alpha^\vee$ erzeugt wird. Dann ist die Einschränkung der Killingform auf den reellen Vektorraum $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \times \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ ein Skalarprodukt auf $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$. Die Teilmenge $\Phi \subset E$ bildet mit diesem Skalarprodukt ein sogenanntes *reduziertes Wurzelsystem.* Wie wir in Lemma 2.6.13 gesehen haben, ist für $\alpha, \beta \in \Phi$ auch

$$s_\alpha(\beta) = \beta - \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha$$

in Φ. In unserem Euklidischen Raum E ist s_α aber nichts anderes, als eine Spiegelung an der zu α orthogonalen Hyperebene. In der Tat, $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$ und $s_\alpha(\lambda) = \lambda$, falls $(\alpha, \lambda) = 0$. Diese Spiegelungen lassen also Φ invariant.

Definition 2.6.16. Es bezeichne W die Untergruppe der orthogonalen Gruppe von E, die durch die Spiegelungen s_α für $\alpha \in \Phi$ erzeugt wird. Sie heißt *Weylgruppe* des Wurzelsystems Φ.

Offenbar ist W eine endliche Gruppe, weil alle erzeugenden Spiegelungen, und somit die ganze Gruppe die endliche Menge von Wurzeln invariant lassen, also permutieren. Die Wurzeln erzeugen aber E. Tatsächlich ist W bis auf Isomorphie eindeutig durch die halbeinfache, komplexe Lie Algebra $\mathfrak{g}$ bestimmt und hängt nicht von der Wahl der Cartan-Unteralgebra ab, denn alle Cartan-Unteralgebren sind ja konjugiert zueinander.

BEISPIEL 2.6.17. *Sei* $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$. *Dann bilden die Diagonalmatrizen in* $\mathfrak{g}$ *eine Cartan-Unteralgebra. Sei* $h = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathfrak{h}$ *und* $\varepsilon_i \in \mathfrak{h}^*$ *für* $i = 1, \ldots, n$ *definiert durch* $\varepsilon_i(h) = \lambda_i$. *Dann ist* $\Phi = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid i \neq j\}$ *das Wurzelsystem und*

$$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{i \neq j} \mathbb{C}E_{ij}$$

die Cartan-Zerlegung von $\mathfrak{g}$.

In der Tat gilt für $h \in \mathfrak{h}$

$$\operatorname{ad}(h)(E_{ij}) = [h, E_{ij}] = (\varepsilon_i - \varepsilon_j)(h)E_{ij}.$$

Somit sind $\alpha_{ij} = \varepsilon_i - \varepsilon_j \in \Phi$. Die Wurzelräume sind genau $\mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{g}_{\varepsilon_i - \varepsilon_j} = \mathbb{C}E_{ij}$. Sie sind 1-dimensionale $\mathfrak{h}$-Untermoduln von $\mathfrak{g}$, wobei $\mathfrak{g}$ selbst ein $\mathfrak{h}$-Modul ist durch die adjungierte Darstellung. Mit $\alpha_i := \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$ für $i = 1, \ldots, n-1$ erhalten wir eine Basis von $\mathfrak{h}^*$ mit $n-1$ Elementen. Wenn $h_i = E_{ii} - E_{i+1,i+1}$ die Standardbasis von $\mathfrak{h}$ bezeichnet, so gilt

$$\begin{aligned} \alpha_i(h_i) &= 2, \\ \alpha_i(h_{i\pm 1}) &= -1, \\ \alpha_i(h_j) &= 0, \quad |i-j| > 1. \end{aligned}$$

Die Kowurzeln sind gerade die Elemente $\alpha_i^\vee = h_{\alpha_i} = h_i$. Damit sind die Zahlen $\alpha_i(h_j)$ die Cartan-Zahlen. Die Elemente t_{α_i} sind durch $t_{\alpha_i} = \frac{1}{2n} h_i$ gegeben, wobei die Killingform durch $\kappa(x, y) = 2n \operatorname{tr}(xy)$ ausgerechnet werden kann. Die Elemente $E_{i,i+1}, E_{ii} - E_{i+1,i+1}, E_{i+1,i}$ bilden eine Unteralgebra von $\mathfrak{g}$, die isomorph zu $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ ist.

2.7. Abstrakte Wurzelsysteme

Unser Ziel ist es, einfache bzw. halbeinfache komplexe Lie Algebren zu klassifizieren, indem wir ihre Wurzelsysteme klassifizieren. Einerseits können wir jeder halbeinfachen komplexen Lie Algebra ein abstraktes Wurzelsystem zuordnen, das bis auf Isomorphie eindeutig ist und nicht von der Wahl der Cartan-Unteralgebra abhängt. Andererseits besagt der Struktursatz von Serre, daß wir zu jedem abstrakten Wurzelsystem Φ wiederum eine halbeinfache komplexe Lie Algebra konstruieren können, deren Wurzelsystem isomorph zu Φ ist. Bevor wir ein abstraktes Wurzelsystem definieren, erinnern wir uns daran, was eine Spiegelung ist.

Definition 2.7.1. Sei V ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum und $\alpha \in V$, $\alpha \neq 0$. Eine *Spiegelung längs* α ist ein Endomorphismus s_α von V mit $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$ und $\dim \operatorname{im}(\operatorname{id}_V - s_\alpha) = 1$.

Lemma 2.7.2. *Sei $\alpha \in V$ mit $\alpha \neq 0$. Dann gelten folgende Aussagen:*

(1) *Es gibt genau eine Linearform $\alpha^\vee \in V^*$ mit*
$$s_\alpha(\lambda) = \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha$$
für alle $\lambda \in V$. Es gilt dann $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$.

(2) $s_\alpha^2 = \operatorname{id}_V$ *und* $\det(s_\alpha) = -1$.

(3) *Die Fixpunktmenge $\{\lambda \in V \mid s_\alpha(\lambda) = \lambda\} = \ker(\alpha^\vee)$ ist eine Hyperebene, die α nicht enthält.*

(4) *Es seien $\beta \in V, \beta^\vee \in V^*$ mit $\langle \beta, \beta^\vee \rangle = 2$ gegeben. Dann definiert*
$$s_{\beta,\beta^\vee}(\lambda) = \lambda - \langle \lambda, \beta^\vee \rangle \beta$$
eine Spiegelung längs β.

Beweis. Zu (1): Wegen $(\operatorname{id}_V - s_\alpha)(\alpha) = 2\alpha$ und $\dim \operatorname{im}(\operatorname{id}_V - s_\alpha) = 1$ folgt $\operatorname{im}(\operatorname{id}_V - s_\alpha) = \mathbb{R}\alpha$. Deshalb gibt es genau eine Linearform $\alpha^\vee \in V^*$, $\alpha^\vee \neq 0$ mit
$$(\operatorname{id}_V - s_\alpha)(\lambda) = \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha.$$
Das beweist die Formel in (1). Weiter ist $-\alpha = s_\alpha(\alpha) = \alpha - \langle \alpha, \alpha^\vee \rangle \alpha$, also $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$.
Zu (2): es gilt für alle $\lambda \in V$
$$\begin{aligned} s_\alpha^2(\lambda) &= s_\alpha(\lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha) \\ &= s_\alpha(\lambda) - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle s_\alpha(\alpha) \\ &= \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle (-\alpha) \\ &= \lambda. \end{aligned}$$
Aus (3) folgt, daß die Eigenwerte von s_α auf $\ker(\alpha^\vee)$ alle gleich 1 sind. Wegen $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$ folgt $\det(s_\alpha) = -1$.
Zu (3): Die Fixpunktmenge ist gleich $\{\lambda \in V \mid \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha = 0\} = \ker(\alpha^\vee)$. Das ist eine Hyperebene in V.
Zu (4): Das ist klar. □

Definition 2.7.3. Eine Teilmenge $\Phi \subset V$ eines Euklidischen Raumes V heißt abstraktes *Wurzelsystem* in V, falls die folgenden Axiome gelten.

(1) Φ ist endlich, erzeugt V und enthält nicht die Null.
(2) Für jede Wurzel $\alpha \in \Phi$ gibt es eine Spiegelung s_α längs α mit $s_\alpha(\Phi) = \Phi$.
(3) Sind $\alpha, \beta \in \Phi$ und s_α die Spiegelung längs α mit $s_\alpha(\Phi) = \Phi$, so ist $\beta - s_\alpha(\beta) \in \mathbb{Z}\alpha$.

(4) Ist $\alpha \in \Phi$, so ist $2\alpha \notin \Phi$.

Das *triviale* Wurzelsystem ist das Wurzelsystem $\Phi = \emptyset$ in $V = 0$. Der *Rang* von Φ ist die Dimension von V. Zwei Wurzelsysteme (Φ_1, V_1) und (Φ_2, V_2) heißen *isomorph*, falls ein Isomorphismus $\varphi\colon V_1 \to V_2$ existiert mit $\varphi(\Phi_1) = \Phi_2$. Sind (Φ_1, V_1) und (Φ_2, V_2) Wurzelsysteme, so ist $\Phi_1 \times 0 \,\cup\, 0 \times \Phi_2$ ein Wurzelsystem in $V_1 \oplus V_2$, das mit $\Phi_1 \oplus \Phi_2$ bezeichnet wird.

Definition 2.7.4. Ein Wurzelsystem der Form $\Phi_1 \oplus \Phi_2$, bei dem Φ_1 und Φ_2 beide nicht-trivial sind, heißt *reduzibel*. Ein Wurzelsystem heißt *irreduzibel*, falls es nicht reduzibel und nicht-trivial ist.

Jedes Wurzelsystem läßt sich in eindeutiger Weise in seine irreduziblen Komponenten zerlegen.
Die Eigenschaft (3) ist eine sehr einschneidende kristallographische Bedingung. Sie besagt, daß für alle $\alpha, \beta \in \Phi$

$$\langle \beta, \alpha^\vee \rangle = \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \in \mathbb{Z}$$

ist, wobei $(\cdot\,, \cdot)$ ein gewisses Skalarprodukt auf V ist, das man noch geeignet wählen kann. Tatsächlich folgt für $\beta \neq \pm\alpha$ aber schon

$$\langle \beta, \alpha^\vee \rangle \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\},$$

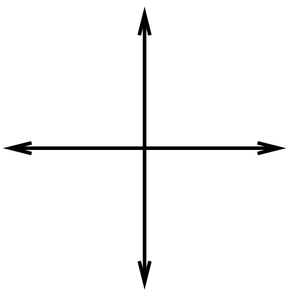
wie wir noch sehen werden. Das limitiert die Beispiele von Wurzelsystemen schon sehr. Wir schauen uns einige Beispiele an.

$\ell = 1$: Das Wurzelsystem A_1 vom Rang 1 besteht aus $\{\alpha, -\alpha\}$.
$\ell = 2$: Das reduzible Wurzelsystem $A_1 \oplus A_1$ vom Rang 2 besteht aus $\{\pm\alpha, \pm\beta\}$. Das Wurzelsystem A_2 besteht aus $\Phi = \{\pm\alpha, \pm\beta, \pm(\alpha+\beta)\}$. Mit $\mathfrak{h}_\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^2$ und dem kanonischen Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ können wir die Wurzeln wie in der Zeichnung dargestellt als Vektoren im $\mathbb{R}^2$ auffassen. In der Tat, mit

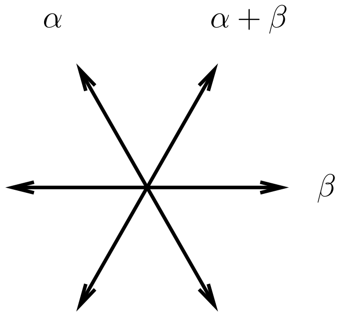
$$\alpha = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gilt $(\alpha, \alpha) = (\beta, \beta) = 1$, und wir haben:

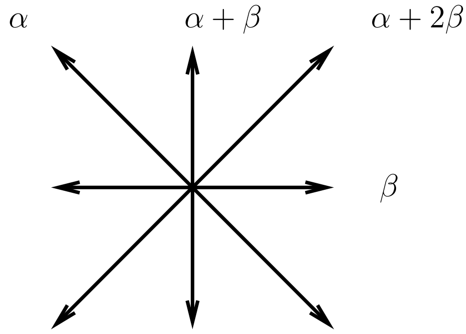
$$\begin{aligned}
\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle &= \frac{2(\alpha, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} = 2, \\
\langle \alpha, \beta^\vee \rangle &= \frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} = -1, \\
\langle \beta, \beta^\vee \rangle &= 2.
\end{aligned}$$



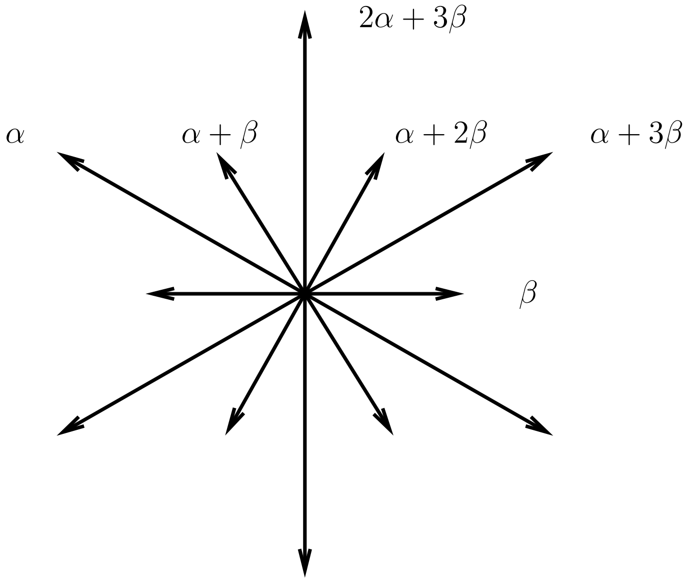
$A_1 \oplus A_1$



A_2



B_2



G_2

Man prüft leicht nach, daß alle Bedingungen eines Wurzelsystems erfüllt sind. Die Winkel zwischen den Wurzeln sind Vielfache von 60 Grad. Die Cartan-Zahlen dabei sind $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = \langle \beta, \beta^\vee \rangle = 2$ und $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle = \langle \beta, \alpha^\vee \rangle = -1$. Man schreibt sie gewöhnlich in eine Matrix, die in unserem Fall wie folgt aussieht:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Das Wurzelsystem B_2 ist gegeben durch $\Phi = \{\pm\alpha, \pm\beta, \pm(\alpha + \beta), \pm(\alpha + 2\beta)\}$. Wir können es mit Vektoren

$$\alpha = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

darstellen und erhalten

$$\langle \alpha, \beta^\vee \rangle = \frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} = -1,$$
$$\langle \beta, \alpha^\vee \rangle = -2.$$

Die Cartan-Matrix hat also die Gestalt
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$
Das Wurzelsystem G_2 ist durch
$$\Phi = \{\pm\alpha, \pm\beta, \pm(\alpha+\beta), \pm(\alpha+2\beta), \pm(\alpha+3\beta), \pm(2\alpha+3\beta)\}$$
gegeben. Man kann $\alpha = (-3/2, \sqrt{3}/2)$ und $\beta = (1,0)$ nehmen. Die Cartan-Matrix von G_2 lautet
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$
Tatsächlich haben wir nun schon alle Wurzelsysteme vom Rang 2 aufgeführt.

Definition 2.7.5. Sei (Φ, V) ein Wurzelsystem. Sei
$$A(\Phi) = \{\varphi \in \operatorname{Aut}(V) \mid \varphi(\Phi) = \Phi\}$$
die Gruppe der Automorphismen, die Φ invariant läßt. Die Untergruppe $W = W(\Phi)$ von $A(\Phi)$, die von den Spiegelungen s_α, $\alpha \in \Phi$ erzeugt wird, heißt *Weylgruppe* des Wurzelsystems Φ.

Weil Φ den Vektorraum V aufspannt, ist jedes $\varphi \in A(\Phi)$ durch seine Einschränkung auf Φ bestimmt. Also ist $A(\Phi)$ isomorph zu einer Untergruppe der symmetrischen Gruppe von Φ, also endlich.

Lemma 2.7.6. *Es sei (Φ, V) ein Wurzelsystem. Dann gilt:*

(1) $\Phi = -\Phi$.
(2) *Für $\alpha \in \Phi$ ist die Spiegelung s_α längs α mit $s_\alpha(\Phi) = \Phi$ eindeutig bestimmt.*
(3) *Es gibt eine eindeutig bestimmte injektive Abbildung $\Phi \to V^*$, $\alpha \mapsto \alpha^\vee$, so daß die Spiegelung s_α längs α mit $s_\alpha(\Phi) = \Phi$ gegeben ist durch*
$$s_\alpha\colon \lambda \mapsto \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha$$
für alle $\lambda \in V$.
(4) *Für $\alpha, \beta \in \Phi$ gilt $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$ und $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle \in \mathbb{Z}$.*

Beweis. Zu (1): Für $\alpha \in \Phi$ ist $-\alpha = s_\alpha(\alpha) \in \Phi$.
Zu (2): Es sei s'_α eine weitere Spiegelung längs α mit $s'_\alpha(\Phi) = \Phi$. Dann betrachte man $\varphi = s_\alpha s'_\alpha \in A(\Phi)$. Wegen
$$(\mathrm{id}_V - \varphi) = (\mathrm{id}_V - s_\alpha)s'_\alpha + (\mathrm{id}_V - s'_\alpha)$$
gilt $\operatorname{im}(\mathrm{id}_V - \varphi) \subset \mathbb{R}\alpha$. Also gibt es ein $\alpha^* \in V^*$ mit
$$\varphi(\lambda) = \lambda + \langle \lambda, \alpha^* \rangle \alpha.$$
Mit Induktion folgt, wegen $\alpha \in \ker(\alpha^*)$,
$$\varphi^n(\lambda) = \lambda + n\langle \lambda, \alpha^* \rangle \alpha.$$
Somit haben wir, mit $n = |A(\Phi)|$
$$\lambda = \varphi^n(\lambda) = \lambda + n\langle \lambda, \alpha^* \rangle \alpha,$$
also $|A(\Phi)|\langle \lambda, \alpha^* \rangle \alpha = 0$ für alle $\lambda \in V$, und damit $\alpha^* = 0$ und $\varphi = \mathrm{id}$, so daß $s'_\alpha = s_\alpha^{-1} = s_\alpha$.
Zu (3): Es ist nur noch die Injektivität der Abbildung $\alpha \mapsto \alpha^\vee$ zu zeigen. Sie folgt aus Lemma 2.7.8.
Zu (4): Wegen $\beta \neq 0$ folgt aus $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle \beta = \alpha - s_\beta(\alpha) \in \mathbb{Z}\beta$ die Behauptung. □

Man kann auch leicht das folgende Resultat zeigen.

LEMMA 2.7.7. *Für $\varphi \in A(\Phi)$ und $\alpha \in \Phi$ gilt $\varphi \circ s_\alpha \circ \varphi^{-1} = s_{\varphi(\alpha)}$. Insbesondere ist $W(\Phi)$ ein Normalteiler in $A(\Phi)$.*

Weiterhin gilt:

LEMMA 2.7.8. *Es gibt ein Skalarprodukt $(\cdot\,,\cdot)$ auf V, das $A(\Phi)$-invariant ist, d.h., $(\varphi(\lambda), \varphi(\mu)) = (\lambda, \mu)$ für alle $\lambda, \mu \in V$ und $\varphi \in A(\Phi)$ erfüllt. Für $\alpha \in \Phi$ gilt die Formel*

$$\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle = \frac{2(\lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}.$$

BEWEIS. Sei $((\cdot\,,\cdot))$ irgendein Skalarprodukt auf V. Dann definiert

$$(\lambda, \mu) = \frac{1}{|A(\Phi)|} \sum_{\varphi \in A(\Phi)} ((\varphi(\lambda), \varphi(\mu)))$$

ein $A(\Phi)$-invariantes Skalarprodukt auf V. Für $\alpha \in \Phi$ und $\lambda \in V$ gilt

$$\begin{aligned}(\alpha, s_\alpha(\lambda) + \lambda) &= (s_\alpha(\alpha), s_\alpha(s_\alpha(\lambda) + \lambda)) \\ &= (-\alpha, s_\alpha(\lambda) + \lambda).\end{aligned}$$

Das bedeutet

$$\begin{aligned}0 &= (\alpha, s_\alpha(\lambda) + \lambda) \\ &= (\alpha, 2\lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha) \\ &= 2(\alpha, \lambda) - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle (\alpha, \alpha).\end{aligned}$$

□

Falls Φ irreduzibel ist, gibt es bis auf positive Vielfache nur ein solches invariantes Skalarprodukt. Ist Φ reduzibel, so sind die verschiedenen irreduziblen Komponenten zueinander orthogonal. Wir können das Skalarprodukt zum Beispiel durch $\max_{\alpha \in \Psi}(\alpha, \alpha) = 2$ für alle irreduziblen Komponenten Ψ von Φ normieren.
Wir können zu einem Wurzelsystem (Φ, V) das sogenannte *duale Wurzelsystem* $(\Phi^\vee, V^*)$ definieren, und zwar durch

$$\Phi^\vee = \{\alpha^\vee \mid \alpha \in \Phi\}.$$

Es gilt $(\alpha^\vee)^\vee = \alpha$ für alle $\alpha \in \Phi \subset V = V^{**}$. Die Weylgruppen von Φ und Φ^* können miteinander identifiziert werden.

Schauen wir uns nun die möglichen Winkel $0 \leq \sphericalangle(\alpha, \beta) \leq \pi$ zweier Wurzeln $\alpha, \beta \in \Phi$ an. Natürlich ist $\sphericalangle(\alpha, \alpha) = 0$ und $\sphericalangle(\alpha, -\alpha) = \pi$. Der folgende Satz zeigt, daß es daneben nur 7 verschiedene Möglichkeiten gibt.

SATZ 2.7.9. *Sind $\alpha, \beta \in \Phi$ mit $\beta \neq \pm\alpha$, so tritt, bis auf Vertauschung von α und β, genau einer der folgenden Fälle auf:*

$\langle\alpha,\beta^\vee\rangle$	$\langle\beta,\alpha^\vee\rangle$	$\sphericalangle(\alpha,\beta)$	$\frac{(\alpha,\alpha)}{(\beta,\beta)}$
0	0	$\pi/2$	$-$
1	1	$\pi/3$	1
-1	-1	$2\pi/3$	1
1	2	$\pi/4$	2
-1	-2	$3\pi/4$	2
1	3	$\pi/6$	3
-1	-3	$5\pi/6$	3

Beweis. Sei $\theta = \sphericalangle(\alpha,\beta)$. Dann ist

$$(\alpha,\beta) = \sqrt{(\alpha,\alpha)}\sqrt{(\beta,\beta)}\cos\theta.$$

Deshalb folgt

$$4\cos^2\theta = 2\frac{(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}\cdot 2\frac{(\beta,\alpha)}{(\beta,\beta)} = \langle\alpha,\beta^\vee\rangle\cdot\langle\beta,\alpha^\vee\rangle.$$

Auf der rechten Seite müssen ganze Zahlen stehen. Es folgt $4\cos^2\theta\in\mathbb{Z}$ mit $0\le 4\cos^2\theta\le 4$. Wegen $\beta\ne\pm\alpha$ folgt

$$4\cos^2\theta\in\{0,1,2,3\}.$$

Ist $\theta=0$ oder $\theta=\pi$, so folgt $\beta=\pm\alpha$, weil andere Vielfache von α ja nicht in Φ liegen können. Nun kann man jede dieser 4 Möglichkeiten diskutieren.
Fall 1: $4\cos^2\theta=0$. Dann ist $\theta=\pi/2$ und $\langle\alpha,\beta^\vee\rangle=\langle\beta,\alpha^\vee\rangle=0$.
Fall (2): $4\cos^2\theta=1$. Dann ist entweder $\cos\theta=1/2$, also $\theta=\pi/3$ und $\langle\alpha,\beta^\vee\rangle=\langle\beta,\alpha^\vee\rangle=1$, oder $\cos\theta=-1/2$ und $\langle\alpha,\beta^\vee\rangle=\langle\beta,\alpha^\vee\rangle=-1$.
Ebenso diskutiert man die restlichen Fälle. □

Der Satz zeigt auch, daß wir im Rang-2-Fall schon alle Wurzelsysteme gefunden haben. Weiterhin impliziert er, daß es in einem irreduziblen Wurzelsystem höchstens zwei verschiedene Wurzellängen geben kann. Die Länge von α ist dabei durch $\|\alpha\|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}$ gegeben. Für $\theta=\pi/3$ oder $\theta=2\pi/3$ sind die Wurzeln gleich lang. Für $\theta=\pi/4,3\pi/4$ ist das Längenverhältnis immer $\sqrt{2}$. Man bedenke, daß wir dabei $\beta\ne\pm\alpha$ annehmen. Also muß es dann genau 2 verschiedene Wurzellängen geben. Für $\theta=\pi/6,5\pi/6$ ist das Längenverhältnis immer $\sqrt{3}$. Falls nicht alle Wurzeln gleich lang sind, sprechen wir von *langen* und *kurzen* Wurzeln.

Lemma 2.7.10. *Für $\alpha,\beta\in\Phi$ mit $\alpha\ne\beta$ und $(\alpha,\beta)>0$ folgt $\alpha-\beta\in\Phi$.*

Beweis. Aus $(\alpha,\beta)>0$ folgt $\langle\alpha,\beta^\vee\rangle>0$. Dann gilt nach obiger Tabelle entweder $\langle\alpha,\beta^\vee\rangle=1$ und $\alpha-\beta=s_\beta(\alpha)\in\Phi$, oder bei Vertauschung $\langle\beta,\alpha^\vee\rangle=1$ und $\alpha-\beta=-s_\alpha(\beta)\in\Phi$. □

Jede Hyperebene durch 0 in V, die keine Wurzel enthält, zerlegt V in zwei Halbräume V_+ und V_-, so daß Φ in *positive Wurzeln* $\Phi_+=\Phi\cap V_+$ und *negative Wurzeln* $\Phi_-=\Phi\cap V_-$ zerlegt wird.

Definition 2.7.11. Sei Φ ein Wurzelsystem in V und Φ_+ die Menge der positiven Wurzeln. Eine Wurzel $\alpha\in\Phi_+$ heißt *einfach*, falls sie sich nicht als Summe zweier positiver Wurzeln schreiben läßt. Die Menge Π der einfachen Wurzeln heißt *Basis* von Φ.

Satz 2.7.12. *Sei Φ ein Wurzelsystem mit Basis $\Pi\subset\Phi$. Dann ist Π $\mathbb{R}$-linear unabhängig und jede Wurzel $\gamma\in\Phi$ läßt sich als*

$$\gamma=\sum_{\alpha\in\Pi}n_\alpha\alpha$$

schreiben, wobei die Koeffizienten n_α *entweder alle in* $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ *liegen, oder alle in* $\mathbb{Z}_{\leq 0}$*.*

Beweis. Es seien $\alpha, \beta \in \Pi$ einfache Wurzeln mit $\alpha \neq \beta$. Dann ist $(\alpha, \beta) \leq 0$, d.h. der Winkel zwischen zwei verschiedenen einfachen Wurzeln ist immer stumpf. Andernfalls wäre nämlich nach Lemma 2.7.10 $\alpha - \beta \in \Phi$, und somit $\pm(\alpha - \beta) \in \Phi_+$. Wegen

$$\alpha = (\alpha - \beta) + \beta$$
$$\beta = (\beta - \alpha) + \alpha$$

erhalten wir einen Widerspruch zur Einfachheit von α oder β.
Um die lineare Unabhängigkeit zu zeigen, nehmen wir

$$\sum_{\alpha \in \Pi} r_\alpha \alpha = 0$$

an. Dann setzen wir

$$\varepsilon = \sum_{\substack{\alpha \in \Pi \\ r_\alpha > 0}} r_\alpha \alpha = \sum_{\substack{\beta \in \Pi \\ r_\beta < 0}} (-r_\beta) \beta.$$

Dann ist

$$(\varepsilon, \varepsilon) = \sum_{\substack{\alpha, \beta \in \Pi \\ r_\alpha > 0,\, r_\beta < 0}} r_\alpha (-r_\beta)(\alpha, \beta).$$

Wegen $(\alpha, \beta) \leq 0$ ist $(\varepsilon, \varepsilon) \leq 0$ und deshalb $\varepsilon = 0$. Nach Konstruktion von Φ_+ gibt es ein $\eta \in V$ mit $(\eta, \alpha) > 0$ für alle $\alpha \in \Phi_+$. Es folgt dann

$$0 = (\eta, \varepsilon) = \sum_{\substack{\alpha \in \Pi \\ r_\alpha > 0}} r_\alpha (\eta, \alpha) = \sum_{\substack{\beta \in \Pi \\ r_\beta < 0}} -r_\beta (\eta, \beta) > 0.$$

Die Summen müssen daher leer sein und es folgt $r_\alpha = 0$ für alle $\alpha \in \Pi$.
Für die zweite Behauptung dürfen wir $\gamma \in \Phi_+$ annehmen, sonst betrachten wir $-\gamma$. Ist $\gamma \in \Pi$, so ist alles klar. Andernfalls ist $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ mit $\gamma_1, \gamma_2 \in \Phi_+$. Wie oben folgt mit η dann

$$(\eta, \gamma) > (\eta, \gamma_1) \text{ und } (\eta, \gamma) > (\eta, \gamma_2)$$

Wir können nun induktiv fortfahren. Das muß nach endlich vielen Schritten enden, da Φ_+ endlich ist. $\square$

Mit einer Darstellung $\gamma = \sum_{\alpha \in \Pi} n_\alpha \alpha$ definiert man die *Höhe* von γ durch

$$ht(\gamma) = \sum_{\alpha \in \Pi} n_\alpha.$$

Definition 2.7.13. Es sei Φ ein Wurzelsystem mit Basis $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$. Wir definieren die *Cartan-Matrix* $A = (A_{ij}) \in M_\ell(\mathbb{Z})$ durch

$$A_{ij} = \frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_i, \alpha_i)}.$$

Aus Satz 2.7.9 folgt

Satz 2.7.14. *Die Cartan-Matrix eines Wurzelsystems hat die folgenden Eigenschaften.*
(1) $A_{ii} = 2$ *für alle* $i = 1, \ldots, \ell$.
(2) $A_{ij} \in \{0, -1, -2, -3\}$ *für* $i \neq j$.
(3) $A_{ij} = 0 \Longleftrightarrow A_{ji} = 0$.

(4) $A_{ij} \in \{-2, -3\} \Longrightarrow A_{ji} = -1$.

Wir setzen $n_{ij} = A_{ij}A_{ji}$. Es gilt $n_{ij} \in \{0, 1, 2, 3\}$ für $i \neq j$.

Definition 2.7.15. Sei Φ ein Wurzelsystem mit Basis $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$. Das *Dynkin-Diagramm* von Φ ist der Graph, der wie folgt gegeben ist: für jede einfache Wurzel α_i gibt es eine Ecke i, und je zwei verschiedene Ecken i und j sind durch genau n_{ij} Kanten verbunden. Zu einem Dynkin-Diagramm betrachte man die quadratische Form

$$Q(x_1, \ldots, x_\ell) := 2\sum_{i=1}^{\ell} x_i^2 - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{\ell} \sqrt{n_{ij}}\, x_i x_j.$$

Das Dynkin-Diagramm und die quadratische Form sind durch die Cartan-Matrix bestimmt. Wir schauen uns das für alle Wurzelsysteme vom Rang 2 an:

Φ	A	Q
$A_1 \oplus A_1$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$2x_1^2 + 2x_2^2$
A_2	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$	$2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2$
B_2	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$	$2x_1^2 - 2\sqrt{2}x_1x_2 + 2x_2^2$
G_2	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$	$2x_1^2 - 2\sqrt{3}x_1x_2 + 2x_2^2$

Das Dynkin-Diagramm ist genau dann zusammenhängend, wenn Φ irreduzibel ist.

Satz 2.7.16. *Die quadratische Form $Q(x_1, \ldots, x_\ell)$ eines Wurzelsystems ist positiv definit.*

Beweis. Es gilt ja für $i \neq j$

$$n_{ij} = 2\frac{(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_i, \alpha_i)} \cdot 2\frac{(\alpha_j, \alpha_i)}{(\alpha_j, \alpha_j)}.$$

Wegen $(\alpha_i, \alpha_j) \leq 0$ folgt also

$$-\sqrt{n_{ij}} = 2\frac{(\alpha_i, \alpha_j)}{\|\alpha_i\|\|\alpha_j\|}.$$

Damit schreibt sich Q wie folgt:

$$\begin{aligned} Q(x_1, \ldots, x_\ell) &= \sum_{i,j=1}^{\ell} \frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{\|\alpha_i\|\|\alpha_j\|} x_i x_j \\ &= 2\Big(\sum_{i=1}^{\ell} \frac{x_i\alpha_i}{\|\alpha_i\|}, \sum_{j=1}^{\ell} \frac{x_j\alpha_j}{\|\alpha_j\|}\Big) \\ &= 2(y, y). \end{aligned}$$

Das zeigt $Q(x_1, \ldots, x_\ell) \geq 0$. Ist $Q(x_1, \ldots, x_\ell) = 0$, so folgt $y = 0$. Da die α_i linear unabhängig sind, bedeutet das $x_i = 0$ für alle i. $\square$

2.8. Klassifikation der Dynkin-Diagramme

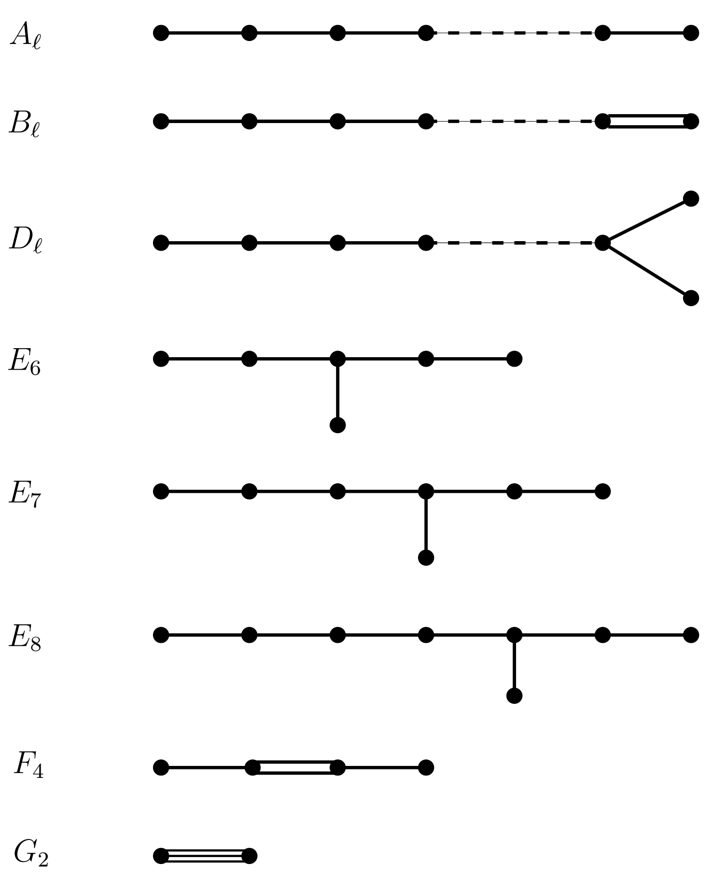
Ist $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache, komplexe Lie Algebra mit Cartan-Unteralgebra $\mathfrak{h}$ und Wurzelsystem Φ, so ist die Cartan-Matrix, und damit auch das Dynkin-Diagramm, unabhängig von der Wahl von $\mathfrak{h}$, und bis auf Umnummerierung unabhängig von den Fundamentalwurzeln $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell \in \Pi$. Die Zusammenhangskomponenten des Dynkin-Diagramms erfüllen folgende Eigenschaften:

(A) Der Graph ist zusammenhängend.

(B) Zwei verschiedene Ecken sind durch $0, 1, 2$ oder 3 Kanten verbunden.

(C) Die zugehörige quadratische Form ist positiv definit.

Theorem 2.8.1. *Die Graphen, die die Bedingungen $(A), (B), (C)$ erfüllen, sind genau die folgenden:*



Dabei ist $\ell \geq 1$ für A_ℓ, $\ell \geq 2$ für B_ℓ und $\ell \geq 4$ für D_ℓ.

Beweis. Wir zeigen zuerst, daß die angegebenen Graphen die Bedingungen erfüllen. Klarerweise erfüllen sie (A) und (B). Also wenden wir uns (C) zu. Wir wissen, daß eine quadratische Form $\sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j$ genau dann positiv definit ist, wenn alle Hauptminoren ihrer symmetrischen Matrix (a_{ij}) positive Determinante haben, d.h.

$$\det(a_{11}) > 0,\ \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} > 0, \dots, \det(a_{ij}) > 0.$$

Nehmen wir nun einen Graphen Γ mit ℓ Ecken von obiger Liste. Wir zeigen mit Induktion über ℓ, daß $Q(x_1, \dots, x_\ell)$ positiv definit ist.

$\ell = 1$: Dann ist $\Gamma = A_1$ und $Q(x_1) = 2x_1^2$ ist positiv definit.
$\ell = 2$: Dann ist $\Gamma = A_2, B_2$ oder G_2. Die symmetrischen Matrizen, die $Q(x_1, x_2)$ repräsentieren, sind durch

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 2 \end{pmatrix},$$

gegeben. Alle Hauptminoren haben positive Determinante.
$\ell \geq 3$: Betrachtet man die Graphen der Liste von Theorem 2.8.1, so sieht man, daß Γ mindestens eine "äußere" Ecke, sagen wir ℓ, besitzt, die mit genau *einer* anderen Ecke, sagen wir $\ell - 1$, durch genau eine Kante verbunden ist. Sei Γ_ℓ dieser Graph, und $\Gamma_{\ell-1}$ der Graph, den man aus Γ_ℓ erhält, indem man die Ecke ℓ entfernt. Ferner sei $\Gamma_{\ell-2}$ der Graph, den man aus $\Gamma_{\ell-1}$ enthält, indem man die Ecke $\ell - 1$ entfernt. Man sieht, daß die Graphen $\Gamma_{\ell-1}$ und $\Gamma_{\ell-2}$ wieder in der Liste vorkommen. Mit S_ℓ sei die symmetrischen Matrix bezeichnet, die die quadratische Form $Q(x_1, \ldots, x_\ell)$ von Γ_ℓ repräsentiert. Die letzte Spalte von S_ℓ ist durch $(0, \ldots, 0, -1, 2)^t$ gegeben. Entwickelt man $\det S_\ell$ nach dieser Spalte, so erhält man

$$\det S_\ell = 2 \det S_{\ell-1} - \det S_{\ell-2}.$$

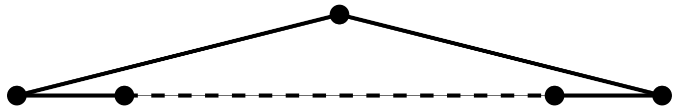
Damit kann man nun aber $\det S_\ell$ für alle Graphen der Liste induktiv berechnen. Nehmen wir den Graphen vom Typ A_ℓ. Wir wissen schon $\det A_1 = 2$ und $\det A_2 = 3$, siehe oben. Dann folgt wegen $\det A_\ell = 2 \det A_{\ell-1} - \det A_{\ell-2}$ also $\det A_\ell = \ell + 1$ mit Induktion, denn entfernt man von dem Graphen A_ℓ eine äußere Ecke ℓ, so erhält man $A_{\ell-1}$, u.s.w.. Ebenso sieht man

$$\begin{aligned}
\det B_\ell &= 2, \\
\det D_\ell &= 4, \\
\det F_4 &= 2 \det B_3 - \det B_2 = 1, \\
\det E_6 &= 2 \det D_5 - \det A_4 = 3, \\
\det E_7 &= 2 \det D_6 - \det A_5 = 2, \\
\det E_8 &= 2 \det D_7 - \det A_6 = 1.
\end{aligned}$$

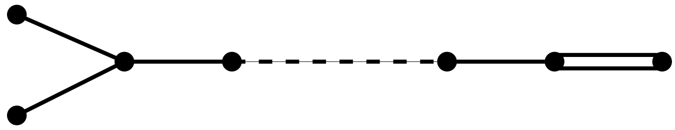
Dabei sind $\Gamma_{\ell-1}$ und $\Gamma_{\ell-2}$ natürlich nicht immer vom gleichen Typ wie Γ_ℓ. Entfernt man zum Beispiel eine äußere Ecke ℓ von F_4, so entsteht B_3. Entfernt man noch $\ell - 1$, bleibt noch B_2 übrig. In jedem Fall sind alle Determinanten positiv. Nun sind die führenden Minoren der symmetrischen Matrix zu Γ_ℓ selbst symmetrische Matrizen zu gewissen Untergraphen von Γ_ℓ. Man kann die Nummerierung so wählen, daß alle diese Untergraphen zusammenhängend sind. Nun hat die Liste der Graphen aber die schöne Eigenschaft, daß jeder zusammenhängende Untergraph wieder in der Liste vorkommt. Also ist die Determinante *jeder* führenden Hauptminore der gegebenen symmetrischen Matrix positiv. Damit ist die quadratische Form zu Γ_ℓ positiv definit.
Nun muß man auch die Umkehrung beweisen: jeder Graph, der $(A), (B), (C)$ erfüllt, ist in unserer Liste enthalten !

Lemma 2.8.2. *Für jeden Graphen der folgenden Liste ist die Determinante der zugehörigen quadratischen Form $Q(x_1, \ldots, x_\ell)$ gleich Null:*

$A_\ell^{(1)}$

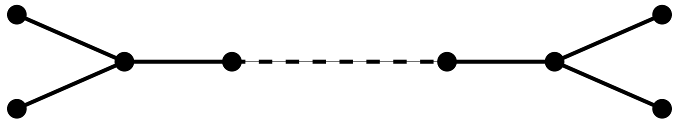


$B_\ell^{(1)}$

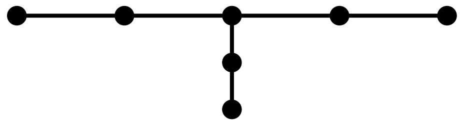


$C_\ell^{(1)}$

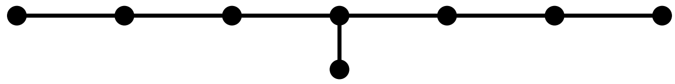
$D_\ell^{(1)}$



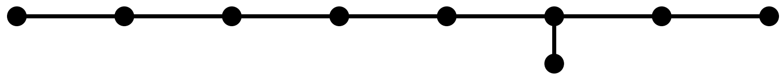
$E_6^{(1)}$



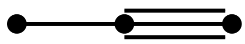
$E_7^{(1)}$



$E_8^{(1)}$



$G_2^{(1)}$



$F_4^{(1)}$

Dabei ist $\ell \geq 2$ *für* $A_\ell^{(1)}$ *und* $C_\ell^{(1)}$*,* $\ell \geq 3$ *für* $B_\ell^{(1)}$ *und* $\ell \geq 4$ *für* $D_\ell^{(1)}$*.*

Ein Graph Γ_ℓ hat hier $\ell + 1$ Ecken. Zum Beispiel kann man sich $A_\ell^{(1)}$ für jedes $\ell \geq 2$ als ein regelmäßiges $(\ell + 1)$-Eck vorstellen. Wir benötigen noch ein Lemma, um die Umkehrung oben zu beweisen.

LEMMA 2.8.3. *Sei* Γ *ein Graph, der* $(A), (B), (C)$ *erfüllt, und* Γ' *ein zusammenhängender Graph, den man aus* Γ *erhält, indem man entweder Ecken wegläßt, oder die Anzahl der Kanten zwischen zwei Ecken verringert, oder beides tut. Dann erfüllt* Γ' *ebenso* $(A), (B), (C)$*.*

Mit diesen beiden Lemmata können wir den Beweis vollenden. Sei also Γ ein Graph, der $(A), (B), (C)$ erfüllt. Die Liste der Graphen aus Lemma 2.8.2 wollen wir die Liste der *verbotenen Untergraphen* nennen. Denn Γ darf keinen solchen Untergraphen enthalten, wegen Lemma 2.8.2 und Lemma 2.8.3. Insbesondere kann Γ also keine Zykel enthalten, sonst hätte Γ ja einen Untergraphen vom Typ $A_\ell^{(1)}$ für ein $\ell \geq 2$. Angenommen, Γ enthält eine dreifache Kante. Dann muß Γ der Graph G_2 sein, denn ansonsten enthielte Γ einen verbotenen Untergraphen $G_2^{(1)}$. Im weiteren dürfen wir also annehmen, daß Γ keine dreifache Kante enthält. Angenommen, Γ enthält eine doppelte Kante. Dann kann Γ nicht mehr als eine doppelte Kante enthalten, ansonsten gäbe es einen Untergraphen $C_\ell^{(1)}$ für ein $\ell \geq 2$. Auch kann Γ neben einer doppelten

Kante nicht zusätzlich noch einen Verzweigungspunkt haben, ansonsten gäbe es einen Untergraphen $B_\ell^{(1)}$ für ein $\ell \geq 3$. Also sieht Γ wie eine Kette aus, mit nur einer Doppelkante. Sitzt diese an einem Ende, so haben wir es mit B_ℓ zu tun. Ansonsten haben wir F_4 vor uns, denn sonst gäbe es einen Untergraphen $F_4^{(1)}$. Nun dürfen wir annehmen, daß Γ keine doppelten und keine dreifachen Kanten enthält. Hat Γ keinen Verzweigungspunkt, so liegt A_ℓ vor für ein $\ell \geq 1$. Gibt es doch einen Verzweigungspunkt, dann nicht mehr als einen, ansonsten hätte man einen Untergraphen $D_\ell^{(1)}$ für ein $\ell \geq 5$. Also hat unser Γ nun genau einen Verzweigungspunkt P, von dem genau drei Kanten abgehen müssen, denn sonst gäbe es einen Untergraphen $D_4^{(1)}$. Die Anzahl der Ecken auf diesen drei Kanten seien mit ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 bezeichnet, mit $\ell_1 \geq \ell_2 \geq \ell_3$. Dann hat Γ insgesamt also $1 + \ell_1 + \ell_2 + \ell_3$ Ecken, mit P als Ecke im "Mittelpunkt" von Γ. Nun gilt $\ell_3 = 1$, denn sonst wären alle $\ell_i \geq 2$ und es gäbe einen Untergraphen $E_6^{(1)}$. Falls $\ell_2 = 1$ ist, so haben wir $\Gamma = D_\ell$ für ein $\ell \geq 4$. Falls $\ell_2 > 1$, so folgt $\ell_2 = 2$, denn sonst wäre $\ell_1, \ell_2 \geq 3$ und Γ hätte einen Untergraphen $E_7^{(1)}$. Das bedeutet, wir dürfen jetzt $\ell_3 = 1, \ell_2 = 2$ annehmen. Dann ist $\ell_1 \leq 4$, ansonsten gäbe es einen Untergraphen $E_8^{(1)}$. Also ist Γ vom Typ E_6, E_7 oder E_8. Damit ist der Beweis fertig. Alle Graphen, die $(A), (B), (C)$ erfüllen, sind in der Liste von Theorem 2.8.1 enthalten. □

Beweis von Lemma 2.8.2 :

Beweis. Sei zuerst $\Gamma = A_\ell^{(1)}$. Jede Zeile der symmetrischen Matrix der zugehörigen quadratischen Form hat einen Eintrag gleich 2, und zwei Einträge gleich -1, und die anderen gleich Null. Die Summe aller Spaltenvektoren dieser Matrix ist also gleich Null, denn jede Komponente dieses Vektors ist die Summe von Zeileneinträgen, also gleich $2 - 1 - 1 = 0$. Daher ist $\det A_\ell^{(1)} = 0$. Bei allen anderen Graphen Γ finden wir eine äußere Ecke ℓ, die genau zu einer anderen Ecke $\ell - 1$ verbunden ist, und zwar entweder durch eine einfache, oder durch eine doppelte Kante. Ist es eine einfache Kante, haben wir wie oben

$$\det S_\ell = 2 \det S_{\ell-1} - \det S_{\ell-2}.$$

Liegt eine doppelte Kante vor, gilt stattdessen

$$\det S_\ell = 2 \det S_{\ell-1} - 2 \det S_{\ell-2}.$$

Damit können wir wieder alle Determinanten induktiv ausrechnen.

$$\begin{aligned}
\det B_3^{(1)} &= 2 \det A_3 - 2(\det A_1)^2 = 0, \\
\det C_2^{(1)} &= 2 \det B_2 - 2 \det A_1 = 0, \\
\det D_4^{(1)} &= 2 \det D_4 - (\det A_1)^3 = 0, \\
\det E_6^{(1)} &= 2 \det E_6 - \det A_5 = 0, \\
\det E_7^{(1)} &= 2 \det E_7 - \det D_6 = 0, \\
\det E_8^{(1)} &= 2 \det E_8 - \det E_7 = 0, \\
\det G_2^{(1)} &= 2 \det G_2 - \det A_1 = 0, \\
\det F_4^{(1)} &= 2 \det F_4 - \det B_3 = 0.
\end{aligned}$$

Weiterhin folgt

$$\begin{aligned}
\det B_\ell^{(1)} &= 2\det D_\ell - 2\det D_{\ell-1} = 0, \quad \ell \geq 4,\\
\det C_\ell^{(1)} &= 2\det B_\ell - 2\det B_{\ell-1} = 0, \quad \ell \geq 3,\\
\det D_\ell^{(1)} &= 2\det D_\ell - \det A_1 D_{\ell-2} = 0, \quad \ell \geq 5.
\end{aligned}$$

□

Beweis von Lemma 2.8.3 :

Beweis. Wir müssen nur zeigen, daß Γ' wieder (C) erfüllt. Dazu sei also $Q(x_1, \dots, x_\ell)$ die quadratische Form von Γ, und $Q'(x_1, \dots, x_m)$ die von Γ', mit $m \leq \ell$. Wir haben

$$\begin{aligned}
Q(x_1, \dots, x_\ell) &= 2\sum_{i=1}^{\ell} x_i^2 - \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{\ell} \sqrt{n_{ij}}x_i x_j,\\
Q'(x_1, \dots, x_m) &= 2\sum_{i=1}^{m} x_i^2 - \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{m} \sqrt{n'_{ij}}x_i x_j,
\end{aligned}$$

mit ganzen Zahlen $n'_{ij} \leq n_{ij}$ für $1 \leq i, j \leq m$. Angenommen Q' wäre nicht positiv definit. Dann gäbe es reele Zahlen $y_1, \dots, y_m$, nicht alle gleich Null, mit

$$Q'(y_1, \dots, y_m) \leq 0.$$

Doch dann hätte man auch

$$\begin{aligned}
Q(|y_1|, \dots, |y_m|, 0, \dots, 0) &= 2\sum_{i=1}^{m} y_i^2 - \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{m} \sqrt{n_{ij}}|y_i||y_j|\\
&\leq 2\sum_{i=1}^{m} y_i^2 - \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{m} \sqrt{n'_{ij}}y_i y_j\\
&= Q'(y_1, \dots, y_m)\\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

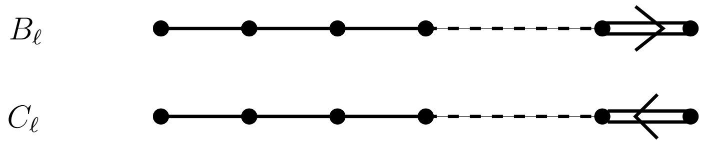
Mit anderen Worten, $Q(v) \leq 0$ mit $v \neq 0$. Somit wäre auch $Q(x_1, \dots, x_\ell)$ nicht positiv definit. Das ist ein Widerspruch. Also folgt die Behauptung. □

Wie gesagt, das Dynkin-Diagramm ist durch die Cartan-Matrix bestimmt durch die Eigenschaft $n_{ij} = A_{ij}Aji$. Allerdings ist umgekehrt die Cartan-Matrix nicht immer eindeutig durch das Dynkin-Diagramm bestimmt. Falls $n_{ij} = 2$, so kann obige Gleichung $2 = -1 \cdot -2$ oder $2 = -2 \cdot -1$ heißen. Analoges gilt bei $n_{ij} = 3$. Von den Graphen unserer Liste passiert das bei B_ℓ, F_4, G_2. Wir können die Eindeutigkeit wiederherstellen, indem wir eine Orientierung in das Dynkin-Diagramm einzeichnen:

Definition 2.8.4. Im Dynkin-Diagramm wird ein Pfeil von der Ecke i zur Ecke j eingezeichnet, genau dann wenn $\|\alpha_i\| > \|\alpha_j\|$ gilt, also $|A_{ji}| > |A_{ij}|$.

Im folgenden Bild bedeutet das linke Diagramm, daß $\|\alpha_i\| = \sqrt{2}\|\alpha_j\|$ gilt, also $A_{ij} = -1, A_{ji} = -2$. Beim rechten Diagramm haben wir $\|\alpha_i\| = \sqrt{3}\|\alpha_j\|$, und $A_{ij} = -1, A_{ji} = -3$. Der Pfeil kann also als Ungleichheitszeichen für die Längen der Fundamentalwurzeln angesehen werden:

Für die Diagramme vom Typ B_2, F_4, G_2 spielt die Richtung des Pfeils keine Rolle, da diese Diagramme symmetrisch sind. Für $B_\ell, \ell \geq 3$ macht es aber einen Unterschied. Deshalb wird dieser Typ in zwei Typen wie folgt aufgespalten:



Das führt dann zu der klassischen Liste der Dynkin-Diagramme einfacher Lie Algebren. Hier ist eine Tabelle dieser Lie Algebren zusammen mit Dimension, Rang und Kardinalität des Wurzelsystems und der Weylgruppe:

Typ	$\mathfrak{g}$	rank($\mathfrak{g}$)	$\lvert\Phi\rvert$	dim($\mathfrak{g}$)	$\lvert W\rvert$
A_n	$\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C})$	$n \geq 1$	$n(n+1)$	$n(n+2)$	$(n+1)!$
B_n	$\mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C})$	$n \geq 2$	$2n^2$	$n(2n+1)$	$n! \cdot 2^n$
C_n	$\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$	$n \geq 3$	$2n^2$	$n(2n+1)$	$n! \cdot 2^n$
D_n	$\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C})$	$n \geq 4$	$2n(n-1)$	$n(2n-1)$	$n! \cdot 2^{n-1}$
G_2	$\mathfrak{g}_2(\mathbb{C})$	2	12	14	$2^2 \cdot 3$
F_4	$\mathfrak{f}_4(\mathbb{C})$	4	48	52	$2^7 \cdot 3^2$
E_6	$\mathfrak{e}_6(\mathbb{C})$	6	72	78	$2^7 \cdot 3^4 \cdot 5$
E_7	$\mathfrak{e}_7(\mathbb{C})$	7	126	133	$2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$
E_8	$\mathfrak{e}_8(\mathbb{C})$	8	240	248	$2^{14} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7$

Dazu gehört die Liste der entsprechenden Cartan-Matrizen, eindeutig bis auf Permutation der Indizes von A_{ij}:

$$A_\ell = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & & & & \\ & & -1 & \cdot & \cdot & & & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ & & & & \cdot & \cdot & -1 & & \\ & & & & & -1 & 2 & -1 & \\ & & & & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B_\ell = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & & & & \\ & & -1 & \cdot & \cdot & & & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ & & & & \cdot & \cdot & -1 & & \\ & & & & & -1 & 2 & -1 & \\ & & & & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & & & & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C_\ell = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & & & & \\ & & -1 & \cdot & \cdot & & & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ & & & & \cdot & \cdot & -1 & & \\ & & & & & -1 & 2 & -1 & \\ & & & & & & -1 & 2 & -2 \\ & & & & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F_4 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$G_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$D_\ell = \begin{pmatrix}
2 & -1 & & & & & & & & \\
-1 & 2 & -1 & & & & & & & \\
 & -1 & 2 & -1 & & & & & & \\
 & & -1 & \cdot & \cdot & & & & & \\
 & & & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\
 & & & & \cdot & \cdot & -1 & & & \\
 & & & & & -1 & 2 & -1 & & \\
 & & & & & & -1 & 2 & -1 & -1 \\
 & & & & & & & -1 & 2 & 0 \\
 & & & & & & & -1 & 0 & 2
\end{pmatrix}$$

$$E_6 = \begin{pmatrix}
2 & -1 & & & & \\
-1 & 2 & -1 & & & \\
 & -1 & 2 & -1 & -1 & \\
 & & -1 & 2 & & \\
 & & -1 & & 2 & -1 \\
 & & & & -1 & 2
\end{pmatrix}$$

$$E_7 = \begin{pmatrix}
2 & -1 & & & & & \\
-1 & 2 & -1 & & & & \\
 & -1 & 2 & -1 & & & \\
 & & -1 & 2 & -1 & -1 & \\
 & & & -1 & 2 & & \\
 & & & -1 & & 2 & -1 \\
 & & & & & -1 & 2
\end{pmatrix}$$

$$E_8 = \begin{pmatrix}
2 & -1 & & & & & & \\
-1 & 2 & -1 & & & & & \\
 & -1 & 2 & -1 & & & & \\
 & & -1 & 2 & -1 & & & \\
 & & & -1 & 2 & -1 & -1 & \\
 & & & & -1 & 2 & & \\
 & & & & -1 & & 2 & -1 \\
 & & & & & & -1 & 2 \\
 & & & & & & &
\end{pmatrix}$$

Der Eindeutigkeitssatz besagt, daß je zwei einfache Lie Algebren mit der gleichen Cartan-Matrix isomorph sind, siehe [**10**].

2.9. Der Struktursatz von Serre

Nachdem wir alle einfachen Lie Algebren durch die Dynkin-Diagramme und Cartan-Matrizen klassifiziert haben, fragen wir uns umgekehrt, ob es zu jedem Dynkin-Diagramm eine eindeutige halbeinfache Lie Algebra gibt, deren Dynkin-Diagramm gleich dem vorgegebenen ist. Mit anderen Worten, gegeben ein abstraktes Wurzelsystem, gibt es dazu eine halbeinfache Lie Algebra, deren Wurzelsystem zu dem gegebenen Wurzelsystem isomorph ist ? Dieses Existenzproblem hat eine positive Antwort, die zuerst von J. Tits gefunden worden ist (1966). Die Konstruktion der Lie Algebra ist aber für jeden Fall verschieden. Das ist kompliziert, jedenfalls für die exzeptionellen einfachen Lie Algebren. Der Struktursatz von Serre löst ebenfalls das Existenzproblem. Er liefert sogar eine *einheitliche* Konstruktion aller einfachen Lie Algebren durch Erzeuger und Relationen, die direkt aus den Cartanzahlen der Wurzelsysteme abgeleitet ist. Das beweist dann auch die Existenz der exzeptionellen einfachen Lie Algebren auf elegante Weise.

Sind α und β Wurzeln, und als Abkürzung jetzt

$$\langle \beta, \alpha \rangle := 2\frac{(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)},$$

so erstreckt sich der Wurzelstring $\beta + j\alpha$ von $\beta - r\alpha$ bis $\beta + q\alpha$, wobei $r - q = \langle \beta, \alpha \rangle$. Gehören α, β zur Basis Π des Wurzelsystems Φ, so ist $\beta - \alpha$ keine Wurzel (wegen positivem und negativem Koeffizient), und der Wurzelstring ist

$$\beta, \beta + \alpha, \ldots, \beta + q\alpha$$

wobei $q = -\langle \beta, \alpha \rangle$. Deshalb ist

$$(\mathrm{ad}\, x_\alpha)^{-\langle \beta, \alpha \rangle + 1} x_\beta = 0$$

für $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ und $x_\beta \in \mathfrak{g}_\beta$, aber

$$(\mathrm{ad}\, x_\alpha)^k x_\beta \neq 0, \quad 0 \leq k \leq -\langle \beta, \alpha \rangle,$$

falls $x_\alpha \neq 0, x_\beta \neq 0$. Sei nun $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$. Dann können wir $e_i \in \mathfrak{g}_{\alpha_i}$ und $f_i \in \mathfrak{g}_{-\alpha_i}$ auswählen, mit $h_i = [e_i, f_i]$, so daß

$$e_1, \ldots, e_\ell,\ f_1, \ldots, f_\ell,\ h_1, \ldots, h_\ell$$

die Lie Algebra erzeugen, und folgende Relationen gelten:

$$[h_i, h_j] = 0, \tag{2.9}$$

$$[e_i, f_i] = h_i, \tag{2.10}$$

$$[e_i, f_j] = 0,\ i \neq j, \tag{2.11}$$

$$[h_i, e_j] = \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle e_j, \tag{2.12}$$

$$[h_i, f_j] = -\langle \alpha_j, \alpha_i \rangle f_j, \tag{2.13}$$

$$(\mathrm{ad}\, e_i)^{-\langle \alpha_j, \alpha_i \rangle + 1} e_j = 0,\ i \neq j, \tag{2.14}$$

$$(\mathrm{ad}\, f_i)^{-\langle \alpha_j, \alpha_i \rangle + 1} f_j = 0,\ i \neq j. \tag{2.15}$$

Der Struktursatz von Serre besagt nun, daß dieses eine Präsentation einer halbeinfachen Lie Algebra ist:

THEOREM 2.9.1 (Serre). *Es sei Φ ein Wurzelsystem vom Rang ℓ und $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$ eine Basis von Φ. Dann ist die komplexe Lie Algebra, die von den 3ℓ Elementen e_i, f_i, h_i erzeugt ist und die Relationen* (2.9) *bis* (2.15) *erfüllt, eine halbeinfache Lie Algebra, deren Wurzelsystem isomorph zu Φ ist.*

PROOF. Der Beweis ist zu lang für unsere Vorlesung. Wir versuchen nur, eine Beweisidee zu geben. Sei $\mathfrak{f}$ die freie Lie Algebra mit 3ℓ Erzeugern

$$X_1, \dots, X_\ell,\ Y_1, \dots, Y_\ell,\ Z_1, \dots, Z_\ell.$$

Sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Lie Algebra mit Erzeugern und Relationen (2.9)–(2.15). Dann gibt es einen eindeutigen Lie Algebra Homomorphismus $\varphi\colon \mathfrak{f} \to \mathfrak{g}$ mit $\varphi(X_i) = e_i$, $\varphi(Y_i) = f_i$ und $\varphi(Z_i) = h_i$. Sei $\mathfrak{a}$ das Ideal in $\mathfrak{f}$, das von den Elementen

$$[Z_i, Z_j],\ [X_i, Y_j] - \delta_{ij} Z_i,\ [Z_i, X_j] - \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle X_j,\ [Z_i, Y_j] + \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle Y_j$$

erzeugt wird. Definiere die Lie Algebra

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{f}/\mathfrak{a}.$$

Diese Lie Algebra hat genau die ersten fünf Relationen von oben, die letzten beiden sind herausfaktorisiert. Es bezeichne x_i das Bild von X_i in $\mathfrak{m}$, y_i das Bild von Y_i und z_i das Bild von Z_i. Man kann nun $\mathfrak{m}$ als Lie Unteralgebra einer Lie Algebra $\mathrm{End}(A)$ realisieren, mit $A = T(V)$ der Tensoralgebra eines gewissen Vektorraums V mit Basis $v_1, \dots, v_\ell$. Man definiert eine Operation von $\mathfrak{f}$ auf A, deren Kern das Ideal $\mathfrak{a}$ enthält. Damit erhält man eine Aktion von $\mathfrak{m}$ auf A, $\psi\colon \mathfrak{m} \to \mathrm{End}(A)$. Nun kann man zeigen, daß die Elemente x_i, y_i, z_i linear unabhängig sind, und die z_i eine ℓ-dimensionale abelsche Lie Unteralgebra $\mathfrak{z}$ von $\mathfrak{m}$ erzeugen. Dann folgt, daß

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_- \oplus \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{m}_+,$$

wobei $\mathfrak{m}_+$ die von den x_i erzeugte Lie Unteralgebra ist, und $\mathfrak{m}_-$ die von den y_i erzeugte Lie Unteralgebra. Mit

$$c_{ij} := \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle$$

definieren wir für alle $i \neq j$ in $\{1, 2, \dots, \ell\}$ die Elemente

$$\begin{aligned} x_{ij} &= \mathrm{ad}(x_i)^{-c_{ji}+1}(x_j), \\ y_{ij} &= \mathrm{ad}(y_i)^{-c_{ji}+1}(y_j). \end{aligned}$$

Die letzten beiden Relationen von oben, nämlich (2.14) und (2.15), gelten genau dann wenn das das Ideal $\mathfrak{k}$, das die x_{ij} und y_{ij} erzeugen, Null ist. Man rechnet nach, daß für alle k und $i \neq j$ gilt

$$\mathrm{ad}(x_k)(y_{ij}) = 0, \tag{2.16}$$

$$\mathrm{ad}(y_k)(x_{ij}) = 0. \tag{2.17}$$

Wir wollen nun also zeigen, daß

$$\mathfrak{g} := \mathfrak{m}/\mathfrak{k}$$

eine endlich-dimensionale, halbeinfache Lie Algebra ist, mit Cartan-Unteralgebra $\mathfrak{h} = \mathfrak{z}/\mathfrak{k}$ und Wurzelsystem Φ. Dazu sein $\mathfrak{i}$ das von den x_{ij} erzeugte Ideal in $\mathfrak{m}_+$, und $\mathfrak{j}$ das von den y_{ij} erzeugte Ideal in $\mathfrak{m}_-$. Dann hat man

$$\mathfrak{i} + \mathfrak{j} \subseteq \mathfrak{k}.$$

Wir behaupten, daß $\mathfrak{i}$ bzw. $\mathfrak{j}$ auch Ideale in $\mathfrak{m}$ sind: jedes y_{ij} ist ein Gewichtsvektor für $\mathfrak{z}$, und $[\mathfrak{z}, \mathfrak{m}_-] \subset \mathfrak{m}_-$. Deshalb ist $[\mathfrak{z}, \mathfrak{j}] \subset \mathfrak{j}]$. Andererseits ist $[x_k, \mathfrak{m}_-] \subset \mathfrak{z} + \mathfrak{m}_-$ und $[x_k, y_{ij}] = 0$ wegen (2.16). Die Jacobi-Identität impliziert dann $\mathrm{ad}(x_k)(\mathfrak{j}) \subset \mathfrak{j}$. Da die x_k aber $\mathfrak{m}_+$ erzeigen, folgt auch $[\mathfrak{m}_+, \mathfrak{j}] \subset \mathfrak{j}$ mit der Jacobi-Identität. Deshalb ist $\mathfrak{j}$ ein Ideal von $\mathfrak{m}$. Das gleiche Argument zeigt auch, daß $\mathfrak{i}$ ein Ideal in $\mathfrak{m}$ ist, und somit auch $\mathfrak{i} + \mathfrak{j}$. Da letzteres Ideal auch die Erzeuger von $\mathfrak{k}$ enthält, folgt

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{i} + \mathfrak{j}.$$

Insbesondere gilt $\mathfrak{z} \cap \mathfrak{k} = 0$, so daß $\mathfrak{z}$ isomorph ist zu einer ℓ-dimensionalen abelschen Unteralgebra von $\mathfrak{g} = \mathfrak{m}/\mathfrak{k}$, durch Projektion. Wegen $\mathfrak{j} \cap \mathfrak{m}_+ = 0$ und $\mathfrak{i} \cap \mathfrak{m}_- = 0$ gilt, als Vektorraumsumme

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+,$$

wobei $\mathfrak{n}_- = \mathfrak{m}_-/\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{n}_+ = \mathfrak{m}_+/\mathfrak{i}$. Die x_i, y_i, z_i bilden jeweils eine $\mathfrak{sl}(2)$, also eine einfache Lie Algebra. Deshalb ist die Projektionsabbildung ein Isomorphismus auf jeder $\mathfrak{sl}(2)$. Die Bilder x_i, y_i, z_i von seien mit e_i, f_i, h_i bezeichnet. Dann ist $\mathfrak{g}$ also durch die 3ℓ Elemente

$$e_1, \ldots, e_\ell,\ f_1, \ldots, f_\ell,\ h_1, \ldots, h_\ell$$

erzeugt, und alle Relationen (2.9)–(2.15) sind erfüllt. Mit etwas Arbeit kann man nun noch zeigen, daß $\mathfrak{g}$ keine abelschen Ideal enthält, also halbeinfach ist, und Φ als Wurzelsystem hat. $\square$

Bibliography

[1] G. F. Armstrong, G. Cairns, B. Jessup: *Explicit Betti numbers for a family of nilpotent Lie algebras*. Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), 381–385.

[2] G. F. Armstrong, G. Cairns, G. Kim: *Lie algebras of cohomological codimension one*. Proc. Amer. Math. Soc. **127** (1999), 709–714.

[3] G. F. Armstrong, S. Sigg. *On the cohomology of a class of nilpotent Lie algebras*. Bull. Austral. Math. Soc. **54** (1996), 517–527.

[4] D. Burde: *Lie Algebra Prederivations and strongly nilpotent Lie Algebras*. Comm. in Algebra **30**, no. 7 (2002), 3157–3175.

[5] N. Bourbaki: *Lie groups and Lie algebras*, Chapters 1–3. Springer-Verlag (1998).

[6] G. Cairns, G. Kim: *The mod 4 behaviour of total Lie algebra cohomology*. Arch. Math. **77** (2001), 177–180.

[7] G. Cairns, B. Jessup: *New bounds on the Betti numbers of nilpotent Lie algebras*. Comm. Algebra **25** (1997), 415–430.

[8] G. Cairns, B. Jessup, J. Pitkethly: *On the Betti numbers of nilpotent Lie algebras of small dimension*. Prog. Math. **145** (1997), 19–31.

[9] E. Cartan, S. Eilenberg: *Homological algebra*. Princeton University Press (1956).

[10] R. Carter: *Lie Algebras of Finite and Affine Type*. Cambridge studies in advanced mathematics **96** (2005).

[11] C. Chevalley, S. Eilenberg: *Cohomology theory of Lie groups and Lie algebras*. Trans. AMS **63** (1948), 85–124.

[12] J. Dixmier: *Cohomologie des algèbres de Lie nilpotentes*. Acta Sci. Math. Szeged **16** (1955), 246–250.

[13] W. A. de Graaf: *Classification of solvable Lie algebras*. Experiment. Math. **14** (2005), no. 1, 15–25.

[14] D. Z. Doković, K. H. Hofmann, *Problems on the exponential function of Lie groups*. Positivity in Lie theory: open problems, Exp. Math. **26** (1998), 45–69.

[15] W. FULTON, J. HARRIS, *Representation Theory*. A first course (1991). Springer Verlag.

[16] S. HELGASON, *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*. Academic press (1978).

[17] J. Hilgert, K. H. Neeb: *Lie-Gruppen und Lie-Algebren*. Braunschweig: Vieweg Verlag (1991).

[18] P. S. Hilton, U. Stammbach: *A Course in Homological Algebra*. Graduate Texts in Mathematics. Springer Verlag (1997).

[19] J. E. Humphreys: *Introduction to Lie algebras and representation theory*. Graduate Texts in Mathematics **9** (1978). Springer-Verlag.

[20] J. E. Humphreys: *Linear algebraic groups*. Graduate Texts in Mathematics **21** (1975). Springer-Verlag.

[21] N. Jacobson: *Lie algebras*. Wiley and Sons (1962).

[22] N. Jacobson: *A note on automorphisms amd derivations of Lie algebras*. Proc. Amer. Math. Soc. **6**, (1955), 281–283.

[23] A. W. KNAPP, *Lie groups beyond an Introduction*, Birkhäuser Verlag (1996).

[24] A. W. Knapp: *Lie groups, Lie algebras, and cohomology*. Princeton University Press (1988).

[25] H. Koch: *Generator and realtion ranks for finite-dimensional nilpotent Lie algebras*. Algebra Logic **16** (1978), 246–253.

[26] J-J. Koszul: *Homologie et cohomologie des algèbres de Lie*. Bull. Soc. Math. France **78** (1950), 65–127.

[27] A. A. Mikhalev, U. U. Umirbaev, A. A. Zolotykh: *An example of a non-free Lie algebra of cohomological dimension* 1. Russ. Math. Surveys. **49**, (1994), 254–255.

[28] T. Pirashvili: *The Euler-Poincaré characteristic of a Lie algebra*. J. Lie Theory. **8**, (1998), 429–431.

[29] J. J. Rotman: *Advanced modern algebra*. Pearson Education Upper Saddle River, New York (2002).

[30] S. Siciliano: *On the Cartan subalgebras of Lie algebras over small fields*. J. Lie Theory **13** (2003), no. 2, 511–518.

[31] H. Strade: *Lie algebras of small dimension*. Contemp. Math. **442** (2007), 233-265.

[32] P. Tirao: *A refinement of the toral rank conjecture for 2-step nilpotent Lie algebras*. Proc. Amer. Math. Soc. **128**, (2000), 2875–2878.

[33] C. A. Weibel: *An introduction to homological algebra*. Cambridge University Press (1997).

[34] M. Vergne: *Cohomologie des algèbres de Lie nilpotentes. Application à l'étude de la variété des algèbres de Lie nilpotentes*. Bull. Soc. Math. France **98** (1970), 81–116.