SUR LES DÉGÉNÉRATIONS D'ALGÈBRES DE LIE

DIETRICH BURDE

1. Introduction

Soit V un espace vectoriel de dimension n sur un corps k et soit $\mathrm{Hom}(\Lambda^2 V, V)$ l'espace vectoriel constitué de toutes les applications bilinéaires antisymétriques $\mu : V \times V \to V$. Une application bilinéaire μ est donnée par ses constantes de structure c_{ij}^k relatives à une base fixée $(e_1, \ldots, e_n)$:

$$\mu(e_i, e_j) = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k e_k$$

Alors μ correspond à un point (c_{ij}^k) dans k^{n^3} tel que

$$c_{ij}^k = -c_{ji}^k.$$

Notons que $\mathrm{Hom}(\Lambda^2 V, V)$ est une variété algébrique munie de la topologie de Zariski.

Définition 1.1. La variété des lois d'algèbres de Lie $\mathcal{L}_n(k) \subset \mathrm{Hom}(\Lambda^2 V, V)$ est définie par les relations polynomiales de Jacobi:

$$\sum_{l=1}^{n} (c_{ij}^l c_{lk}^m + c_{jk}^l c_{li}^m + c_{ki}^l c_{lj}^m) = 0 \tag{1}$$

Le groupe linéaire $GL_n(k)$ agit sur $\mathcal{L}_n(k)$ par changement de base

$$(g \cdot \mu)(x, y) = g(\mu(g^{-1}x, g^{-1}y))$$

où g appartient à $GL_n(k)$ et $x, y \in V$. On note $O(\mu)$ l'orbite de μ sous l'action de $GL(n, k)$, et $\overline{O(\mu)}$ l'adhérence de $O(\mu)$ relative à la topologie de Zariski. Les orbites dans $\mathcal{L}_n(k)$ correspondent aux classes d'isomorphisme des algèbres de Lie de dimension n. On s'intéresse à plusieur questions concernant la variété $\mathcal{L}_n(k)$, notamment aux composantes irréductibles et aux orbites ouvertes.

Définition 1.2. Une loi $\mu \in \mathcal{L}_n(k)$ est dite *rigide* si son orbite $O(\mu)$ est ouverte dans $\mathcal{L}_n(k)$.

Si μ est rigide, alors l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ correspondante est algébrique et n'admet aucune déformation non-triviale. D'autre part, si $H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = 0$ alors μ est rigide. Roger Carles [5] a prouvé le résultat suivant concernant le nombre des composantes de $\mathcal{L}_n(k)$ et le nombre des orbites ouvertes (et donc les nombre des algèbres de Lie rigides):

Proposition 1.3. *Si $r(n)$ est le nombre des composantes irréductibles de $\mathcal{L}_n(k)$ et $s(n)$ le nombre des orbites ouvertes, on a $(r(1), \ldots, r(7)) = (1, 1, 2, 4, 7, 17, 49)$ et $(s(1), \ldots, s(7)) = (1, 1, 1, 2, 3, 6, 14)$.*

Ces nombres croissent très vite avec n. On a la minoration suivante [10] :

$$e^{n/4} < s(n) < r(n) < 2^{n^4/6}$$

pour n assez grand. Soit $\mathcal{C}$ une composante irréductible de $\mathcal{L}_n(k)$ passant par μ. Alors $O(\mu) \subset \mathcal{C}$. Comme $\mathcal{C}$ est fermée pour la topologie de Zariski, l'adhérence de l'orbite $\overline{O(\mu)}$ est aussi contenue dans $\mathcal{C}$. Ainsi toute composante $\mathcal{C}$ contenant μ contient aussi toutes les dégénerations de μ:

Définition 1.4. On dit que μ est une dégénération de λ si $\mu \in \overline{O(\lambda)}$. Dans ce cas on dit aussi que λ dégénère vers μ, ce que l'on note $\lambda \to_{\deg} \mu$.

Une dégénération est appelée *triviale* si $\lambda \cong \mu$, c'est à dire $\mu \in O(\lambda)$. On remarque que $\lambda \to_{\deg} \mu$ et $\mu \to_{\deg} \nu$ implique $\lambda \to_{\deg} \nu$. Donc l'opération du dégénération est transitiv. Les dégénérations d'algèbres de Lie sont tres importantes pour la physique. Elles sont appelées contractions, avec quelques hypothèses supplémentaires. En effet les passages à la limite considérés par les physiciens peuvent souvent être décrits comme des contractions d'algèbres de Lie. La mécanique classique est une limite de la mécanique quantique décrite par la contraction $\mathfrak{h} \to_{\deg} \mathfrak{t}_{2n+1}$, où $\mathfrak{h}$ est l'algèbre de Weyl-Heisenberg, et $\mathfrak{t}_{2n+1}$ est l'algèbre de Lie abélienne de la même dimension. Souvent on peut décrir une dégénération par un sous-groupe $\{g_t\}$ de $GL_n(k)$ à un paramètre.

Définition 1.5. Une dégénération $\lambda \to_{\deg} \mu$ est dite dégénération par un *sous-groupe à un paramètre*, ou 1-PSG, si elle peut être décrite par un morphisme de groupes $g : k^* \to GL_n(k)$, $t \mapsto g_t$ tel que $\mu \cong \lim_{t\to 0} g_t \cdot \lambda$.

Exemple 1.6. *Soit $\lambda_0 \in \mathcal{L}_n(k)$ la loi correspondant à l'algèbre abélienne, i.e., $\lambda_0(x,y) = 0$, et $g_t = t^{-1}I_n$. On a $\lambda \to_{\deg} \lambda_0$ pour tout $\lambda \in \mathcal{L}_n(k)$:*

$$(g_t \cdot \lambda)(x,y) = t^{-1}\lambda(tx,ty) = t\lambda(x,y)$$

En effet la passage à la limite de $g_t \cdot \lambda$ pour $t \to 0$ est égale à λ_0. Donc toute algèbre de Lie dégénère vers l'algèbre de Lie abélienne de même dimension par un sous-groupe á un paramètre.

La notion de dégénération peut ainsi être regardée comme suit (voir [8]):

Proposition 1.7. *Soit k un corps algébriquement clos. L'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ est une dégénération d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ si et seulement s'il existe une algèbre de valuation discrète A sur k dont le corps des fractions K est un corps de fonctions de dimension 1, et une algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ de même dimension que $\mathfrak{g}$ telles que*

$$\mathfrak{a} \otimes_A K \cong \mathfrak{g} \otimes_k K$$
$$\mathfrak{a} \otimes_A k = \mathfrak{h}$$

2. Les variétés $\mathcal{L}_n(k)$

Examinons les variétés $\mathcal{L}_n(k)$ et les dégénérations sur le corps $\mathbb{C}$ pour les cas concret des petites dimensions. Alors $\mathcal{L}_n(\mathbb{C})$ peut être munie de deux topologies: la topologie métrique dans $\mathbb{C}^{n^3}$, et la topologie de Zariski. Mais cela ne change rien pour les dégenerations. Pour $n = 2$ nous avons

$$\mathcal{L}_2(\mathbb{C}) = \overline{O(\mathfrak{r}_2(\mathbb{C}))} = O(\mathfrak{r}_2(\mathbb{C})) \cup O(\mathbb{C}^2)$$

où $\mathfrak{r}_2(\mathbb{C})$ est l'algèbre non-abélienne. La seul dégénération est $\mathfrak{r}_2(\mathbb{C}) \to_{\deg} \mathbb{C}^2$. L'orbite de $\mathfrak{r}_2(\mathbb{C})$ est ouverte. Il n'y a pas une dégénération vers $\mathfrak{r}_2(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{L}_2(\mathbb{C})$.

La variété $\mathcal{L}_3(\mathbb{C})$ est la réunion de deux composantes irréductibles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. Les algèbres de Lie à trace nulle (la forme linéaire tr ad(x) est nulle) forment la composante $\mathcal{C}_1$:

$$\mathcal{C}_1 = \overline{O(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))} = O(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})) \cup O(\mathfrak{r}_{3,-1}(\mathbb{C})) \cup O(\mathfrak{n}_3(\mathbb{C})) \cup O(\mathbb{C}^3)$$

La classification de toutes les orbites en dimension 3 et de leur adhérence dans $\mathcal{L}_3(\mathbb{C})$:

$\mathfrak{g}$	crochets de Lie	$\overline{O(\mathfrak{g})}$
$\mathbb{C}^3$	$-$	$\mathbb{C}^3$
$\mathfrak{n}_3(\mathbb{C})$	$[e_1,e_2]=e_3$	$\mathfrak{n}_3(\mathbb{C}),\ \mathbb{C}^3$
$\mathfrak{r}_2(\mathbb{C})\oplus\mathbb{C}$	$[e_1,e_2]=e_2$	$\mathfrak{r}_2(\mathbb{C})\oplus\mathbb{C},\ \mathfrak{n}_3(\mathbb{C}),\ \mathbb{C}^3$
$\mathfrak{r}_3(\mathbb{C})$	$[e_1,e_2]=e_2,\ [e_1,e_3]=e_2+e_3$	$\mathfrak{r}_3(\mathbb{C}),\ \mathfrak{r}_{3,1}(\mathbb{C}),\ \mathfrak{n}_3(\mathbb{C}),\ \mathbb{C}^3$
$\mathfrak{r}_{3,\alpha}(\mathbb{C})$	$[e_1,e_2]=e_2,\ [e_1,e_3]=\alpha e_3,\ \lvert\alpha\rvert<1$	$\mathfrak{r}_{3,\alpha}(\mathbb{C}),\ \mathfrak{n}_3(\mathbb{C}),\ \mathbb{C}^3$
$\mathfrak{r}_{3,-1}(\mathbb{C})$	$[e_1,e_2]=e_2,\ [e_1,e_3]=-e_3$	$\mathfrak{r}_{3,-1}(\mathbb{C}),\ \mathfrak{n}_3(\mathbb{C}),\ \mathbb{C}^3$
$\mathfrak{r}_{3,1}(\mathbb{C})$	$[e_1,e_2]=e_2,\ [e_1,e_3]=e_3$	$\mathfrak{r}_{3,1}(\mathbb{C}),\ \mathbb{C}^3$
$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$	$[e_1,e_2]=e_3, [e_1,e_3]=-2e_1, [e_2,e_3]=2e_2$	$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}),\ \mathfrak{r}_{3,-1}(\mathbb{C}),\ \mathfrak{n}_3(\mathbb{C}),\ \mathbb{C}^3$

La composante $\mathcal{C}_2$ est constituée d'algèbres de Lie résolubles:

$$\mathcal{C}_2 = \mathcal{R}_3(\mathbb{C}) = \cup_\alpha O(\mathfrak{r}_{3,\alpha}(\mathbb{C})) \cup O(\mathfrak{r}_3(\mathbb{C})) \cup O(\mathfrak{r}_2(\mathbb{C})\oplus\mathbb{C}) \cup O(\mathfrak{n}_3(\mathbb{C}) \cup O(\mathbb{C}^3)$$

Alors $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \overline{O(\mathfrak{r}_{3,-1}(\mathbb{C}))}$ et $\dim \mathcal{C}_1 = \dim \mathcal{C}_2 = 6$. On peut représenter toutes les dégénérations essentielles dans $\mathcal{L}_3(\mathbb{C})$:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \arrow[d] & \\
\mathfrak{r}_{3,\alpha^2\neq 1}(\mathbb{C}) \arrow[dr] & \mathfrak{r}_{3,-1}(\mathbb{C}) \arrow[d] & \mathfrak{r}_3(\mathbb{C}) \arrow[dl] \arrow[d] \\
\mathfrak{r}_2(\mathbb{C})\oplus\mathbb{C} \arrow[r] \arrow[dr] & \mathfrak{n}_3(\mathbb{C}) \arrow[d] & \mathfrak{r}_{3,1}(\mathbb{C}) \arrow[dl] \\
 & \mathbb{C}^3 &
\end{tikzcd}$$

Proposition 2.1. *La variété $\mathcal{L}_4(\mathbb{C})$ est la réunion de 4 composantes irréductibles $\mathcal{C}_i$, $i = 1,\dots,4$:*

$$\mathcal{C}_1 = \overline{O(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})\oplus\mathbb{C})}$$
$$\mathcal{C}_2 = \overline{O(\mathfrak{r}_2(\mathbb{C})\oplus\mathfrak{r}_2(\mathbb{C}))}$$
$$\mathcal{C}_3 = \overline{\cup_{\alpha,\beta} O(\mathfrak{g}_4(\alpha,\beta))}$$
$$\mathcal{C}_4 = \overline{\cup_{\alpha} O(\mathfrak{g}_5(\alpha))}$$

Les composantes sont de dimension 12, i.e., $\dim \mathcal{C}_i = 12$. Le nombre des orbites ouvertes est égale à 2, en effet les algèbres de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})\oplus\mathbb{C}$ et $\mathfrak{r}_2(\mathbb{C})\oplus\mathfrak{r}_2(\mathbb{C})$ sont rigides.
La classification de toutes les orbites en dimension 4 est donnée dans le tableaux suivant:

$\mathfrak{g}$	crochets de Lie
$\mathbb{C}^4$	
$\mathfrak{n}_3(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}$	$[e_1, e_2] = e_3$
$\mathfrak{n}_4(\mathbb{C})$	$[e_1, e_2] = e_3,\ [e_1, e_3] = e_4$
$\mathfrak{r}_2(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}^2$	$[e_1, e_2] = e_2$
$\mathfrak{r}_2(\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{r}_2(\mathbb{C})$	$[e_1, e_2] = e_2,\ [e_3, e_4] = e_4$
$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}$	$[e_1, e_2] = e_2,\ [e_1, e_3] = -e_3,\ [e_2, e_3] = e_1$
$\mathfrak{g}_1$	$[e_1, e_2] = e_2,\ [e_1, e_3] = e_3,\ [e_1, e_4] = e_4$
$\mathfrak{g}_2(\alpha)$	$[e_1, e_2] = e_2,\ [e_1, e_3] = e_3,\ [e_1, e_4] = e_3 + \alpha e_4$
$\mathfrak{g}_3$	$[e_1, e_2] = e_2,\ [e_1, e_3] = e_3,\ [e_1, e_4] = 2e_4,\ [e_2, e_3] = e_4$
$\mathfrak{g}_4(\alpha, \beta)$	$[e_1, e_2] = e_2,\ [e_1, e_3] = e_2 + \alpha e_3,\ [e_1, e_4] = e_3 + \beta e_4$
$\mathfrak{g}_5(\alpha)$	$[e_1, e_2] = e_2,\ [e_1, e_3] = e_2 + \alpha e_3,\ [e_1, e_4] = (\alpha + 1)e_4,\ [e_2, e_3] = e_4$

Les autres algèbres decomposables sont: $\mathfrak{g}_2(0) \cong \mathfrak{r}_{3,1}(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}$, $\mathfrak{g}_4(\alpha, 0) \cong \mathfrak{r}_{3,\alpha}(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}$ avec $\alpha \neq 0, 1$ et $\mathfrak{g}_4(0, 1) \cong \mathfrak{r}_3(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}$. En outre $\mathfrak{g}_5(\alpha) \cong \mathfrak{g}_5(\alpha')$ si et seulement si $\alpha\alpha' = 1$ ou $\alpha = \alpha'$, et $\mathfrak{g}_4(\alpha, \beta) \cong \mathfrak{g}_4(\alpha', \beta')$ si et seulement si les proportions $1 : \alpha : \beta$ et $1 : \alpha' : \beta'$ coincident (après une permutation convenable).
La classification de leur adhérence dans $\mathcal{L}_4(\mathbb{C})$ (voir [4]):

$\mathfrak{g}$	$\overline{O(\mathfrak{g})}$
$\mathbb{C}^4$	$\mathbb{C}^4$
$\mathfrak{n}_3 \oplus \mathbb{C}$	$\mathfrak{n}_3 \oplus \mathbb{C},\ \mathbb{C}^4$
$\mathfrak{n}_4$	$\mathfrak{n}_4,\ \mathfrak{n}_3 \oplus \mathbb{C},\ \mathbb{C}^4$
$\mathfrak{r}_2 \oplus \mathbb{C}^2$	$\mathfrak{r}_2 \oplus \mathbb{C}^2,\ \mathfrak{n}_3 \oplus \mathbb{C},\ \mathbb{C}^4$
$\mathfrak{r}_2 \oplus \mathfrak{r}_2$	$\mathfrak{r}_2 \oplus \mathfrak{r}_2,\ \mathfrak{g}_5(0),\ \mathfrak{g}_4(0,0),\ \mathfrak{r}_3 \oplus \mathbb{C},\ \mathfrak{r}_{3,1} \oplus \mathbb{C},$ $\mathfrak{r}_{3,\alpha\neq 1} \oplus \mathbb{C},\ \mathfrak{r}_2 \oplus \mathbb{C}^2,\ \mathfrak{n}_4,\ \mathfrak{n}_3 \oplus \mathbb{C},\ \mathbb{C}^4$
$\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathbb{C}$	$\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathbb{C},\ \mathfrak{g}_5(-1),\ \mathfrak{r}_{3,-1} \oplus \mathbb{C},\ \mathfrak{n}_4,\ \mathfrak{n}_3 \oplus \mathbb{C},\ \mathbb{C}^4$
$\mathfrak{g}_1$	$\mathfrak{g}_1,\ \mathbb{C}^4$
$\mathfrak{g}_2(\alpha), \alpha \neq 1$	$\mathfrak{g}_2(\alpha),\ \mathfrak{n}_3 \oplus \mathbb{C},\ \mathbb{C}^4$
$\mathfrak{g}_2(1)$	$\mathfrak{g}_2(1),\ \mathfrak{g}_1,\ \mathfrak{n}_3 \oplus \mathbb{C},\ \mathbb{C}^4$
$\mathfrak{g}_3$	$\mathfrak{g}_3,\ \mathfrak{g}_2(2),\ \mathfrak{n}_3 \oplus \mathbb{C},\ \mathbb{C}^4$
$\mathfrak{g}_4(\alpha, \beta)$	$\mathfrak{g}_4(\alpha, \beta),\ \mathfrak{n}_4,\ \mathfrak{n}_3 \oplus \mathbb{C},\ \mathbb{C}^4$
$\mathfrak{g}_4(\alpha, 1), \alpha \neq 1$	$\mathfrak{g}_4(\alpha, 1),\ \mathfrak{g}_2(\alpha),\ \mathfrak{n}_4,\ \mathfrak{n}_3 \oplus \mathbb{C},\ \mathbb{C}^4$
$\mathfrak{g}_4(1, 1)$	$\mathfrak{g}_4(1, 1),\ \mathfrak{g}_1,\ \mathfrak{g}_2(1),\ \mathfrak{n}_4,\ \mathfrak{n}_3 \oplus \mathbb{C},\ \mathbb{C}^4$
$\mathfrak{g}_4(0, 0)$	$\mathfrak{g}_4(0, 0),\ \mathfrak{r}_2 \oplus \mathbb{C},\ \mathfrak{n}_4,\ \mathfrak{n}_3 \oplus \mathbb{C},\ \mathbb{C}^4$
$\mathfrak{g}_5(\alpha), \alpha \neq 0, 1$	$\mathfrak{g}_5(\alpha),\ \mathfrak{g}_4(\alpha, \alpha + 1),\ \mathfrak{n}_4,\ \mathfrak{n}_3 \oplus \mathbb{C},\ \mathbb{C}^4$
$\mathfrak{g}_5(0)$	$\mathfrak{g}_5(0),\ \mathfrak{g}_4(0, 1),\ \mathfrak{g}_2(0),\ \mathfrak{n}_4,\ \mathfrak{n}_3 \oplus \mathbb{C},\ \mathbb{C}^4$
$\mathfrak{g}_5(1)$	$\mathfrak{g}_5(1),\ \mathfrak{g}_4(1, 2),\ \mathfrak{g}_2(2),\ \mathfrak{n}_4,\ \mathfrak{n}_3 \oplus \mathbb{C},\ \mathbb{C}^4$

Théorème 2.2. *Si $\lambda \to_{\deg} \mu$ est une dégénération par un sous-groupe $\{g_t\}$ à un paramètre, alors μ est l'algèbre graduée associée donnée par la filtration sur λ induite par $\{g_t\}$. D'autre part, si μ est l'algèbre graduée associée donnée par une filtration quelconque sur λ, alors μ est une dégénération par un sous-groupe à un paramètre.*

On en déduit le théorème suivant [4]:

Théorème 2.3. *Toute dégénération dans $\mathcal{L}_n(\mathbb{C})$ peut être décrite par un sous-groupe à un paramètre pour $n \leq 3$. L'assertion est fausse pour $n \geq 4$.*

Par exemple, la dégénération $\mathfrak{r}_2 \oplus \mathfrak{r}_2 \to_{\deg} \mathfrak{n}_4$ n'est pas une dégénération à un paramètre. Les dégénérations en dimension 4 sont très compliquées. Nous avons le résultat suivant:

Proposition 2.4. *On peut obtenir toutes les dégénérations dans $\mathcal{L}_4(\mathbb{C})$ par la composition de dégénérations essentielles suivantes:*

$$
\begin{array}{l}
\mathfrak{g}_4(\alpha,\beta) \longrightarrow \mathfrak{n}_4 \longrightarrow \mathfrak{n}_3 \oplus \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^4 \\
\mathfrak{g}_4(\alpha,1) \longrightarrow \mathfrak{g}_2(\alpha) \longrightarrow \mathfrak{n}_3 \oplus \mathbb{C} \\
\mathfrak{g}_4(0,0) \longrightarrow \mathfrak{r}_2 \oplus \mathbb{C} \longrightarrow \mathfrak{n}_3 \oplus \mathbb{C} \\
\mathfrak{g}_2(1) \longrightarrow \mathfrak{g}_1 \longrightarrow \mathbb{C}^4 \\
\mathfrak{g}_5(1) \longrightarrow \mathfrak{g}_3 \longrightarrow \mathfrak{g}_2(2) \\
\mathfrak{g}_5(\alpha) \longrightarrow \mathfrak{g}_4(\alpha,\alpha+1) \\
\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathbb{C} \longrightarrow \mathfrak{g}_5(-1) \\
\mathfrak{r}_2 \oplus \mathfrak{r}_2 \longrightarrow \mathfrak{g}_4(\alpha,0) \\
\mathfrak{r}_2 \oplus \mathfrak{r}_2 \longrightarrow \mathfrak{g}_5(0)
\end{array}
$$

On peut dessiner toutes les dégénérations dans les 4 composantes. Voila les dégénérations dans $\overline{O(\mathfrak{r}_2 \oplus \mathfrak{r}_2)}$:

$$
\begin{tikzcd}
\mathfrak{g}_4(0,0) \arrow[dd] \arrow[ddr] & \mathfrak{r}_2 \oplus \mathfrak{r}_2 \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{g}_5(0) \arrow[d] \\
 & \mathfrak{r}_{3,\alpha} \oplus \mathbb{C} \arrow[d] & \mathfrak{r}_3 \oplus \mathbb{C} \arrow[d] \\
\mathfrak{r}_2 \oplus \mathbb{C}^2 \arrow[dr] & \mathfrak{n}_4 \arrow[d] & \mathfrak{r}_{3,1} \oplus \mathbb{C} \arrow[dl] \\
 & \mathfrak{n}_3 \oplus \mathbb{C} \arrow[d] & \\
 & \mathbb{C}^4 &
\end{tikzcd}
$$

Pour la classification on utilise la proposition suivante:

Proposition 2.5. *Soit $\lambda \to_{\deg} \mu$ une dégénération non-triviale: Alors on a*

$$\begin{aligned}
\dim O(\lambda) &> \dim O(\mu) \\
\dim \operatorname{Der} \lambda &< \dim \operatorname{Der} \mu \\
\dim[\mu, \mu] &\leq \dim[\lambda, \lambda] \\
\dim Z(\lambda) &\leq \dim Z(\mu) \\
\dim H^j(\lambda) &\leq \dim H^j(\mu) \\
\dim H^j(\lambda, \lambda) &\leq \dim H^j(\mu, \mu), \; j = 0, 1, 2, 3, \dots
\end{aligned}$$

La dernière partie de ce résultat se démontre à l'aide de l'inégalité $\dim Z^j(\lambda, \lambda) \leq \dim Z^j(\mu, \mu)$ pour $j \in \mathbb{N}_0$. Soit $d : C^j(\lambda, \lambda) \to C^{j+1}(\lambda, \lambda)$ l'opérateur cobord. Le formule du rang pour l'application lineaire d implique

$$\dim H^j(\lambda, \lambda) = \dim Z^j(\lambda, \lambda) - \dim C^{j+1}(\lambda, \lambda) + \dim Z^{j+1}(\lambda, \lambda)$$

Donc $\dim H^j(\lambda, \lambda) \leq \dim H^j(\mu, \mu)$, parsque $\dim C^{j+1}(\lambda, \lambda) = \dim C^{j+1}(\mu, \mu)$.

De plus, nous avons plusieur invariants, e.g.

$$c_{ij}(\mathfrak{g}) = \frac{\operatorname{tr}(\operatorname{ad} x)^i \operatorname{tr}(\operatorname{ad} y)^j}{\operatorname{tr}((\operatorname{ad} x)^i \circ (\operatorname{ad} y)^j)}$$

au cas où l'expression est indépendante de x, y, et le denominateur est différent de nul. Par exemple,

$$c_{ij}(\mathfrak{r}_{3,\alpha} \oplus \mathbb{C}) = 1 + \frac{\alpha^i + \alpha^j}{1 + \alpha^{i+j}}$$

Dans ce cas $c_{ij}(\mathfrak{h}) = c_{ij}(\mathfrak{g})$ pour toute $\mathfrak{h} \in \overline{O(\mathfrak{g})}$.

Soit $\mathcal{N}_n(k) \subset \mathcal{L}_n(k)$ la sous-variété des lois d'algèbres de Lie nilpotentes. On a [3]:

Théorème 2.6. *Toute dégénération dans $\mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ peut être décrite par un sous-groupe à un paramètre pour $n \leq 6$. L'assertion est fausse pour tout $n \geq 7$.*

Si $\mathfrak{g}$ est caractéristiquement nilpotente (c'est-à-dire, toutes ses dérivations sont nilpotentes), alors $\mathfrak{g}$ n'admet pas une graduation. Donc les dégénérations entre les algèbres caractéristiquement nilpotentes ne peuvent pas être décrites par un 1-PSG. Il est bien connu que toute composante irréductible de $\mathcal{L}_n(k)$ contient un ouvert non vide des algebres de Lie caractéristiquement nilpotentes pour $n \geq 8$ (voir [7]).

Un autre problème consiste à déterminer les algèbres nilpotentes rigides. En etudiant les variétés $\mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ pour $n \leq 8$ on a constaté que toute loi $\mu \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ est la dégénération non-triviale d'une autre loi $\lambda \in \mathcal{L}_n(\mathbb{C})$. Donc il n'existe pas une algèbre de Lie nilpotente et rigide dans $\mathcal{L}_n(\mathbb{C})$ pour $n \leq 8$, et aucune des composantes de $\mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ est aussi une composante de la variété $\mathcal{L}_n(\mathbb{C})$. Il est connu que toute algèbre de Lie nilpotente et rigide dans $\mathcal{L}_n(\mathbb{C})$ est caractéristiquement nilpotente [6]. Dans [1] il est affirm'e qu'aucune loi d'algèbre de Lie nilpotente filiforme n'est rigide dans $\mathcal{L}_n(\mathbb{C})$. Il semble intéressant de savoir si la conjecture suivante est vraie.

Conjecture (Vergne) 2.7. *Toute loi $\mu \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ est la dégénération d'une autre loi $\lambda \in \mathcal{L}_n(\mathbb{C})$, c'est-à-dire, il existe une dégénération non-triviale $\lambda \to_{\deg} \mu$. En particulier, il n'existe pas une algèbre de Lie nilpotente et rigide dans $\mathcal{L}_n(\mathbb{C})$.*

La conjecture est vraie pour les petites dimensions. Il est évident pour $n \leq 3$. Pour $n = 4$ les algèbres de Lie nilpotentes sont données par $\mathfrak{n}_4(\mathbb{C}), \mathfrak{n}_3(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}$ et $\mathbb{C}^4$. Mais d'aprés Proposition 2.4,

$$\mathfrak{r}_2 \oplus \mathfrak{r}_2 \longrightarrow \mathfrak{n}_4 \longrightarrow \mathfrak{n}_3 \oplus \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^4$$

Donc la conjecture est vraie pour $n = 4$. En dimension 5 nous avons la classification suivante de toutes les orbites dans $\mathcal{N}_5(\mathbb{C})$:

$\mathfrak{g}$	crochets de Lie
$\mathbb{C}^5$	$-$
$\mathfrak{n}_3(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}^2$	$[e_1, e_2] = e_3$
$\mathfrak{n}_4(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}$	$[e_1, e_2] = e_3,\ [e_1, e_3] = e_4$
$\mathfrak{g}_{5,6}(\mathbb{C})$	$[e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = e_4, [e_1, e_4] = e_5, [e_2, e_3] = e_5$
$\mathfrak{g}_{5,5}(\mathbb{C})$	$[e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = e_4, [e_1, e_4] = e_5$
$\mathfrak{g}_{5,4}(\mathbb{C})$	$[e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = e_4, [e_2, e_3] = e_5$
$\mathfrak{g}_{5,3}(\mathbb{C})$	$[e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_4] = e_5, [e_2, e_3] = e_5$
$\mathfrak{g}_{5,2}(\mathbb{C})$	$[e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_3] = e_5$
$\mathfrak{g}_{5,1}(\mathbb{C})$	$[e_1, e_3] = e_5, [e_2, e_4] = e_5$

Les dégénérations dans $\mathcal{N}_5(\mathbb{C})$ sont données par (voir [8]):

$$\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{g}_{5,6} \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\mathfrak{g}_{5,3} \arrow[d] \arrow[dr] & \mathfrak{g}_{5,4} \arrow[d] & \mathfrak{g}_{5,5} \arrow[dl] \arrow[d] \\
\mathfrak{g}_{5,1} \arrow[dr] & \mathfrak{n}_4 \oplus \mathbb{C} \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{g}_{5,2} \arrow[dl] \\
 & \mathfrak{n}_3 \oplus \mathbb{C} \arrow[d] & \\
 & \mathbb{C}^5 &
\end{tikzcd}$$

L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{5,6}(\mathbb{C})$ est à la tête du diagramme. Elle est rigide dans $\mathcal{N}_5(\mathbb{C})$. Donc $\mathcal{N}_5(\mathbb{C}) = \overline{O(\mathfrak{g}_{5,6}(\mathbb{C}))}$ et il suffit de montrer q'il existe une algèbre de Lie $\mathfrak{h}_5(\mathbb{C}) \in \mathcal{L}_5(\mathbb{C})$ telle que $\mathfrak{h}_5(\mathbb{C}) \to_{\deg} \mathfrak{g}_{5,6}(\mathbb{C})$. En effet, nous pouvons choisir $\mathfrak{h}_5(\mathbb{C})$ comme suit:

$\mathfrak{g}$	crochets de Lie
$\mathfrak{h}_5(\mathbb{C})$	$[e_1, e_2] = e_2 + e_3, [e_1, e_3] = e_3 + e_4, [e_1, e_4] = e_4 + e_5,$ $[e_1, e_5] = e_4 + e_5, [e_2, e_3] = e_4 + e_5$

Alors $\mathfrak{h}_5(\mathbb{C})$ dégénère vers $\mathfrak{g}_{5,6}(\mathbb{C})$ par $g_t = \operatorname{diag}(t^{-1}, t^{-2}, t^{-3}, t^{-4}, t^{-5})$. Donc la conjecture est vraie pour $n = 5$. Soit $n = 6$ et

$\mathfrak{g}$	crochets de Lie
$\mathfrak{g}_{6,6}(\mathbb{C})$	$[e_1,e_2]=e_3,[e_1,e_3]=e_4,[e_1,e_4]=e_5,[e_2,e_3]=e_5$ $[e_2,e_5]=e_6,[e_3,e_4]=-e_6$
$\mathfrak{h}_6(\mathbb{C})$	$[e_1,e_2]=e_2+e_3,[e_1,e_3]=e_4,[e_1,e_4]=e_5,[e_1,e_5]=e_5$ $[e_2,e_3]=e_5,[e_2,e_5]=e_6,[e_3,e_4]=-e_6,[e_3,e_5]=-e_6$

La variéte $\mathcal{N}_6(\mathbb{C})=\overline{O(\mathfrak{g}_{6,6}(\mathbb{C}))}$ est irréductible, voir [12]. Mais $\mathfrak{h}_6(\mathbb{C})$ dégénère vers $\mathfrak{g}_{6,6}(\mathbb{C})$ par $g_t=\operatorname{diag}(t^{-1},t^{-2},t^{-3},t^{-4},t^{-5},t^{-7})$. Donc $\mathfrak{g}_{6,6}(\mathbb{C})$ n'est pas rigide dans $\mathcal{L}_6(\mathbb{C})$.
Pour $n\geq 7$ il exist des familles d'algèbres de Lie nilpotentes $\mathfrak{g}(\alpha)$ telles que $\mathfrak{g}(\alpha)\cong\mathfrak{g}(\beta)$ si et seulement si $\alpha=\beta$. Ce cas est plus complexe. Les variétés $\mathcal{L}_7(\mathbb{C})$ et $\mathcal{L}_8(\mathbb{C})$ ne sont pas irréductible. Pour $n=7$ nous avons deux composantes et la variété $\mathcal{L}_8(\mathbb{C})$ est la réunion de hiut composantes irréductibles [1].

3. Dégénerations dans $\mathcal{N}_7(\mathbb{C})$

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie filiforme de dimension 7 sur $\mathbb{C}$. Alors il existe une base telle que $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ est donnée par:

$$\begin{aligned}
[e_1,e_i]&=e_{i+1},\ i\geq 2\\
[e_2,e_3]&=\alpha e_5+\beta e_6+\gamma e_7\\
[e_2,e_4]&=\alpha e_6+\beta e_7\\
[e_2,e_5]&=(\alpha-\delta)e_7\\
[e_3,e_4]&=\delta e_7
\end{aligned}$$

La classification est bien connue, voir [13]: Chaque algèbre $\mathfrak{g}(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ est isomorphe à une algèbre suivante:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{g}_A=\mathfrak{g}(0,0,0,0),\ \mathfrak{g}_B=\mathfrak{g}(0,0,1,0),\ \mathfrak{g}_C=\mathfrak{g}(0,0,0,-1),\ \mathfrak{g}_D=\mathfrak{g}(0,1,0,0),\\
&\mathfrak{g}_E=\mathfrak{g}(0,1,1,0),\ \mathfrak{g}_F=\mathfrak{g}(0,1,0,-1),\ \mathfrak{g}_G=\mathfrak{g}(1,0,0,0),\\
&\mathfrak{g}_H=\mathfrak{g}(1,0,1,0),\ \mathfrak{g}_I(\lambda)=\mathfrak{g}(1,0,0,1-\lambda),\ \lambda\in\mathbb{C},\ \lambda\neq 1
\end{aligned}$$

Nous avons déterminé quelques invariantes de ces algèbres. Soit $h_i=\dim H^i(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ la dimension de cohomologie adjointe, et $A=\{\lambda\in\mathbb{C}\mid(\lambda-3)(\lambda^2-\lambda+1)=0\}$:

$\mathfrak{g}$	$(h_1,h_2,h_3,h_4,\ldots,h_7)$	$\dim O(\mathfrak{g})$	$\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$
$\mathfrak{g}_A$	$(7,17,25,23,14,7,2)$	36	$\mathfrak{g}_{6,A}$
$\mathfrak{g}_B$	$(6,15,23,22,14,7,2)$	37	$\mathfrak{g}_{6,A}$
$\mathfrak{g}_D$	$(6,13,19,20,14,7,2)$	37	$\mathfrak{g}_{6,B}$
$\mathfrak{g}_E$	$(5,12,19,20,14,7,2)$	38	$\mathfrak{g}_{6,B}$
$\mathfrak{g}_G$	$(5,11,15,15,11,6,2)$	38	$\mathfrak{g}_{6,D}$
$\mathfrak{g}_C$	$(5,10,15,16,11,6,2)$	38	$\mathfrak{g}_{6,A}$
$\mathfrak{g}_H$	$(4,10,15,15,11,6,2)$	39	$\mathfrak{g}_{6,D}$
$\mathfrak{g}_I(\lambda),\lambda\in A$	$(4,9,15,16,12,7,2)$	39	$\mathfrak{g}_{6,D}$
$\mathfrak{g}_F$	$(4,9,15,16,11,6,2)$	39	$\mathfrak{g}_{6,B}$
$\mathfrak{g}_I(\lambda),\lambda\notin A$	$(4,9,14,15,11,6,2)$	39	$\mathfrak{g}_{6,D}$

Théorème 3.1. *On peut obtenir toutes les dégénérations dans $\mathcal{N}_7(\mathbb{C})$ entre les algèbres de Lie filiformes par la composition de dégénérations essentielles suivantes:*

$$
\begin{array}{l}
\mathfrak{g}_I(\lambda) \longrightarrow \mathfrak{g}_E \longrightarrow \mathfrak{g}_B \longrightarrow \mathfrak{g}_A \\
\mathfrak{g}_I(\lambda) \longrightarrow \mathfrak{g}_D \longrightarrow \mathfrak{g}_A \\
\mathfrak{g}_H \longrightarrow \mathfrak{g}_G \longrightarrow \mathfrak{g}_B \\
\mathfrak{g}_F \longrightarrow \mathfrak{g}_C \longrightarrow \mathfrak{g}_B \\
\mathfrak{g}_H \longrightarrow \mathfrak{g}_E \longrightarrow \mathfrak{g}_D \\
\mathfrak{g}_F \longrightarrow \mathfrak{g}_E \\
\mathfrak{g}_H \longrightarrow \mathfrak{g}_D
\end{array}
$$

Les dégénérations par un sous-groupe á un paramétre:

$$
\begin{array}{rl}
\mathfrak{g} \to_{\deg} \mathfrak{g}_A, & g_t^{-1} = \mathrm{diag}(t, t^5, t^6, t^7, t^8, t^9, t^{10}) \\
\mathfrak{g}_E \to_{\deg} \mathfrak{g}_D, & g_t^{-1} = \mathrm{diag}(t, t^3, t^4, t^5, t^6, t^7, t^8) \\
\mathfrak{g}_E \to_{\deg} \mathfrak{g}_B, & g_t^{-1} = \mathrm{diag}(t, t^4, t^5, t^6, t^7, t^8, t^9) \\
\mathfrak{g}_F \to_{\deg} \mathfrak{g}_C, & g_t^{-1} = \mathrm{diag}(t, t^2, t^3, t^4, t^5, t^6, t^7) \\
\mathfrak{g}_F \to_{\deg} \mathfrak{g}_D, & g_t^{-1} = \mathrm{diag}(t, t^3, t^4, t^5, t^6, t^7, t^8) \\
\mathfrak{g}_H \to_{\deg} \mathfrak{g}_G, & g_t^{-1} = \mathrm{diag}(t, t^2, t^3, t^4, t^5, t^6, t^7) \\
\mathfrak{g}_H \to_{\deg} \mathfrak{g}_B, & g_t^{-1} = \mathrm{diag}(t, t^4, t^5, t^6, t^7, t^8, t^9)
\end{array}
$$

References

[1] J. M. Ancochea-Bermudez, J. R. Gómez-Martin, G. Valeiras, M. Goze: *Sur les composantes irréductibles de la varieté des lois d'algèbres de Lie nilpotentes*. J. Pure Appl. Algebra **106**, No.1 (1996), 11–22.

[2] J. M. Ancochea-Bermudez, M. Goze: *On the varieties of nilpotent Lie algebras of dimension* 7 *and* 8. J. Pure Appl. Algebra **77**, (1992), 131–140.

[3] D. Burde: *Degenerations of filiform Lie algebras.* J. Lie Theory **9** (1999), 193–202.

[4] D. Burde, C. Steinhoff: *Classification of orbit closures of* 4*–dimensional complex Lie algebras*. J. Algebra **214** (1999), 729–739.

[5] R. Carles, Y. Diakité: *Sur les variétés d'algèbres de Lie de dimension* ≤ 7. J. Algebra **91** (1984), 53–63.

[6] R. Carles: *Sur les structures des algèbres de Lie rigides*. Ann. Inst. Fourier **34** (1984), 65–82.

[7] M. Goze, Y. B. Khakimdjanov: *Sur les algèbres de Lie nilpotentes admettant un tore de dérivations.* Manuscripta Math. **84** (1994), 115–224.

[8] F. Grunewald, J. O'Halloran: *Varieties of nilpotent Lie algebras of dimension less than six.* J. Algebra **112** (1988), 315–325.

[9] E. Inonü, E. P. Wigner: *On the contractoion of groups and their representations.* Proc. Acad. Sciences **39** (1953), 510–524.

[10] A. A. Kirillov, Y. A. Neretin: *The variety* A_n *of* n*–dimensional Lie algebra structures*. Amer. Math. Soc. Transl. **137** (1987), 21–30.

[11] J. Lauret: *Degenerations of Lie algebras and Geometry of Lie groups.* Diff. Geom. Appl. **16** (2003).

[12] C. Seeley: *Degenerations of 6–dimensional nilpotent Lie algebras over* $\mathbb{C}$. Comm. in Algebra **18** (1990), 3493–3505.

[13] C. Seeley: *7–dimensional nilpotent Lie algebras*. Trans. Am. Math. Soc. **335** (1993), 479–496.

Institut für Mathematik, Universität Wien, Strudlhofgasse 4, 1160 Wien, Autriche
E-mail address: dietrich.burde@univie.ac.at