Universität Wien
Prof. Dr. D. Burde

Computeralgebra
— MATHEMATICA —

---

1. Gleichheit von Idealen. Sei K ein beliebiger Körper und $R = K[x, y]$. Man zeige, daß die beiden Ideale

$$\begin{aligned} I &= \langle xy + x, xy + y, x^2, y^2 \rangle \\ J &= \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

identisch sind. Man beachte, daß der Beweis auch für Charakteristik $p = 2$ gelten soll. Man verifiziere diese Gleichheit mit MATHEMATICA (man versuche es zum Beispiel mit folgendem Befehl):

```
GroebnerBasis[{x*y + x, x*y + y, x^2, y^2}, {x, y}]
```

2. Der Buchberger-Algorithmus. Man berechne mit Hilfe des Buchberger-Algorithmus eine Gröbnerbasis für das Ideal

$$I = \langle x^2 + y - 1, xy - x \rangle \subseteq \mathbb{Q}[x, y]$$

bezüglich der Monomordnung $\prec = \prec_{\text{lex}}$ mit $x \succ y$. Sollte diese Basis noch nicht minimal sein, so konstruiere man eine minimale Gröbnerbasis für I mit dem Lemma von Dickson. Welche der beiden folgenden Polynome gehört zu I ?

$$\begin{aligned} f_1 &= x^2 + y^2 - y \\ f_2 &= 3xy^2 - 4xy + x + 1 \end{aligned}$$

Man verifiziere das Resultat mit MATHEMATICA unter Verwendung der Befehle **GroebnerBasis** und **PolynomialReduce**.

3. Reduzierte Gröbnerbasen. Welche der folgenden endlichen Teilmengen von $\mathbb{Q}[x, y, z]$ sind Gröbnerbasen bezüglich der Monomordnung $\prec = \prec_{\text{lex}}$? Welche Teilmengen davon sind minimal oder sogar reduziert ?

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1 &= \{x + y, y^2 - 1\} \quad \text{für } x \succ y \\ \mathcal{G}_2 &= \{y + x, y^2 - 1\} \quad \text{für } y \succ x \\ \mathcal{G}_3 &= \{x^2 + y^2 - 1, xy - 1, x + x^3 - y\} \quad \text{für } x \succ y \\ \mathcal{G}_4 &= \{xyz - 1, x - y, y^2 z - 1\} \quad \text{für } x \succ y \succ z \end{aligned}$$

Man finde in allen Fällen die reduzierte Gröbnerbasis. Vorsicht mit $\mathcal{G}_2$.

4. Gröbnerbasen bezüglich verschiedener Monomordungen. Man berechne mit MATHEMATICA eine Gröbnerbasis für das Ideal $I = \{f_1, f_2, f_3\} \subseteq \mathbb{Q}[x, y, z]$ mit $z \succ y \succ x$; einmal bezüglich $\prec = \prec_{\text{lex}}$, und einmal bezüglich $\prec = \prec_{\text{grlex}}$:

$$\begin{aligned} f_1 &= x^2y - 2yz + 1, \\ f_2 &= xy^2 - z^2 + 2x, \\ f_3 &= y^2z - x^2 + 5 \end{aligned}$$

5. Polynomiale Gleichungssysteme I. Sei K ein Körper der Charakteristik Null. Man bestimme alle Lösungen $(x, y, z) \in K^3$ des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} x^2y + 4y^2 - 17 &= 0 \\ 2xy - 3y^3 + 8 &= 0 \\ xy^2 - 5xy + 1 &= 0 \end{aligned}$$

6. Polynomiale Gleichungssysteme II. Man bestimme alle Lösungen $(x, y, z) \in K^3$ des folgenden Gleichungssystems, und zwar einmal für $K = \mathbb{R}$ und einmal für $K = \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} (x + y)^3 &= z \\ (y + z)^3 &= x \\ (z + x)^3 &= y \end{aligned}$$

7. Polynomiale Gleichungssysteme III. Man bestimme alle Matrizen in der Gruppe $SL_2(\mathbb{Z}[x])$ mit normierten Polynomen vom Grad zwei, d.h. von der Form

$$A = \begin{pmatrix} x^2 + a_1x + a_2 & x^2 + b_1x + b_2 \\ x^2 + c_1x + c_2 & x^2 + d_1x + d_2 \end{pmatrix}$$

mit $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2 \in \mathbb{Z}$. Um die Aufgabe nicht zu schwer zu machen, wollen wir $a_1 = 0$ annehmen.

Hinweis: Die Bedingung $\det A = 1$ ist nach Koeffizientenvergleich mit dem konstanten Polynom $f \equiv 1$ äquivalent zu folgendem Diophantischen Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} a_1 - b_1 - c_1 + d_1 &= 0 \\ a_1d_1 + a_2 - b_1c_1 - b_2 - c_2 + d_2 &= 0 \\ a_1d_2 + a_2d_1 - b_1c_2 - b_2c_1 &= 0 \\ a_2d_2 - b_2c_2 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem hat viele Lösungen, die unter anderem von den Lösungen der sogenannten Pellschen Gleichung

$$X^2 - DY^2 = 1$$

erzeugt werden. Man betrachte folgende Beispiele von solchen Matrizen in $SL_2(\mathbb{Z}[x])$:

$$A_2 = \begin{pmatrix} x^2 - 2 & x^2 + 2x + 1 \\ x^2 + 2x - 5 & x^2 + 4x + 2 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} x^2 - 3 & x^2 + x - 1 \\ x^2 + x - 5 & x^2 + 2x - 2 \end{pmatrix}$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} x^2 - 5 & x^2 + 4x + 4 \\ x^2 + 4x - 14 & x^2 + 8x + 11 \end{pmatrix}$$

$$A_6 = \begin{pmatrix} x^2 - 6 & x^2 + 2x - 1 \\ x^2 + 2x - 11 & x^2 + 4x - 2 \end{pmatrix}$$

$$A_7 = \begin{pmatrix} x^2 - 7 & x^2 + 3x + 1 \\ x^2 + 3x - 15 & x^2 + 6x + 2 \end{pmatrix}$$

$$A_{13} = \begin{pmatrix} x^2 - 13 & x^2 + 180x + 636 \\ x^2 + 180x - 662 & x^2 + 360x + 32387 \end{pmatrix}$$
